Abdelilah BENYOUSSEF **Amal BERRADA**

Professeurs à la Faculté des Sciences
Université Mohammed V
Rabat

Cours de



Point et système de points matériels

A L'USAGE DES ETUDIANTS DU 1[ER] CYCLE UNIVERSITAIRE
FACULTES DES SCIENCES, FACULTES DES SCIENCES ET TECHNIQUES,
CLASSES PREPARATOIRES AUX ECOLES D'INGENIEURS

PRESENTATION

Ce document présente l'enseignement de « Mécanique du point et du système de points matériels », dispensé pendant quelques années par les auteurs à la Faculté des Sciences de Rabat. Certes, les ouvrages de qualité consacrés à cette même partie de la physique classique sont nombreux et chacun d'eux comporte généralement son originalité qui traduit la signature de ses auteurs. C'est justement ce cachet, fruit d'une expérience pédagogique qui fait que nous avons privilégié dans le développement du document tel aspect sur tel autre tout en restant à l'intérieur des contours des programmes de mécanique classique généralement enseignés. C'est donc pour faire partager ces ''petits errements'' aux étudiants, aux collègues, et autres concernés que nous avons été encouragés à publier ce cours. Les lecteurs remarqueront que le présent document a insisté de manière particulière sur quelques aspects mathématiques ou physiques à travers lesquels on peut découvrir quelques fondements de la mécanique du point et du système de points matériels. On peut citer notamment le problème du repérage, le trièdre de Frenet , la notion de référentiel, le pendule de Foucault et autres applications liées à la dynamique terrestre, les collisions élastiques et inélastiques, les oscillateurs harmoniques, le problème à deux corps etc… Ce document n'est sûrement pas exempt d'imperfections ou de ''coquilles'' qui ont pu échapper à notre attention ; les lecteurs nous en excuseront volontiers et toutes leurs remarques seront les bienvenues.

Les auteurs

Chapitre I

I- Repérage d'un point matériel. Systèmes de coordonnées, surfaces et courbes coordonnées.

L'espace physique est décrit par un espace euclidien (dimension 3) où sont définis les angles et les distances. La position de tout point matériel M dans cet espace est définie par rapport à un (ou plusieurs) objet(s) appelé(s) repère. Pour caractériser cette position c'est à dire pour repérer le point M, il suffit en général de déterminer 3 paramètres réels q_1, q_2,q_3 ou coordonnées du point. A cet effet on définit un système de coordonnées cohérent qui peut engendrer un espace dans lequel on associe à tout point M trois nombres q_1, q_2,q_3 de manière unique.

1- Systèmes de coordonnées

a- Coordonnées cartésiennes

Soit un point origine O et un système d'axes (Oxyz) sur lesquels on considère trois vecteurs unitaires $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ supposés constituer une base orthonormée directe. Tout point M de l'espace peut être caractérisé par ses coordonnées cartésiennes $q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$ qui sont les projections de $\vec{OM}$ sur les axes $\vec{Ox}$, $\vec{Oy}$ et $\vec{Oz}$ respectivement (figure I.1) , c'est-à-dire :

$$\vec{OM} = x\ \vec{e}_1 + y\ \vec{e}_2 + z\ \vec{e}_3$$

$x = \overline{Om_1}$ est l'abscisse du point M, $y = \overline{Om_2}$ l'ordonnée et $z = \overline{Om_3}$ la cote avec $x, y, z \in]-\infty ; +\infty[$.

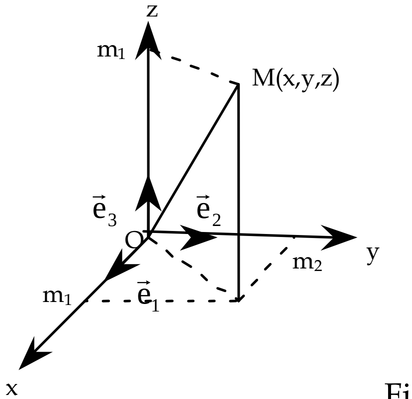


Fig. I.1

b- Coordonnées cylindriques

En coordonnées cylindriques tout point M peut être caractérisé de manière également unique par la connaissance des trois paramètres r,φ ,z :

$q_1 = r = |\vec{Om}| \geq 0$ (rayon vecteur) $|\vec{Om}|$

$q_2 = \varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM}) \in [0,2\pi[$ (angle polaire)

$q_3 = z = \overline{Om'} \in]-\infty,+\infty[$ (cote)

Les points m et m' sont les projections orthogonales de M respectivement sur le plan polaire $(\vec{Ox}, \vec{Oy})$ et sur l'axe $\vec{Oz}$ (voir FigI.2).

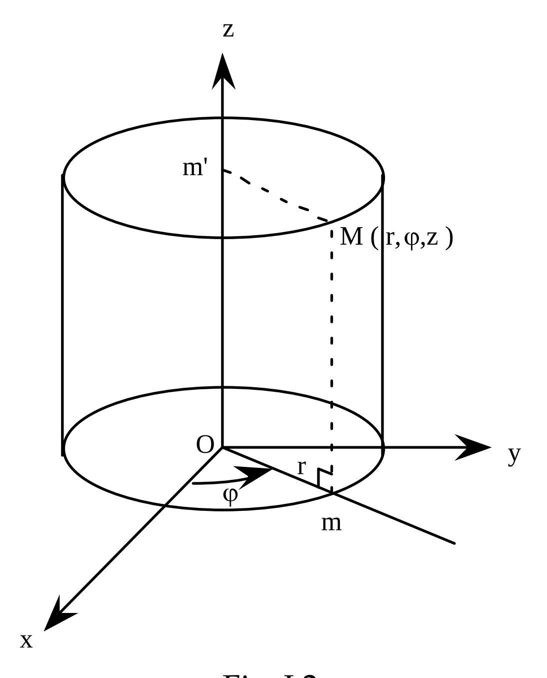


Fig. I.2

c- Coordonnées sphériques

En coordonnées sphériques tout point M de l'espace (figure I.3) peut être caractérisé de manière également unique par la connaissance des trois paramètres (ou coordonnées sphériques), ρ,θ,φ définis par :

$$q_1 = \rho = |\,\vec{OM}\,| \in [0,+\infty[\qquad \text{(rayon vecteur)}$$

$$q_2 = \theta = (\vec{Oz}\,,\ \vec{OM}) \in [0,\pi] \qquad \text{(colatitude)}$$

$$q_3 = \varphi = (\vec{Ox}\,,\ \vec{Om}) \in [0,2\pi[\qquad \text{(longitude)}$$

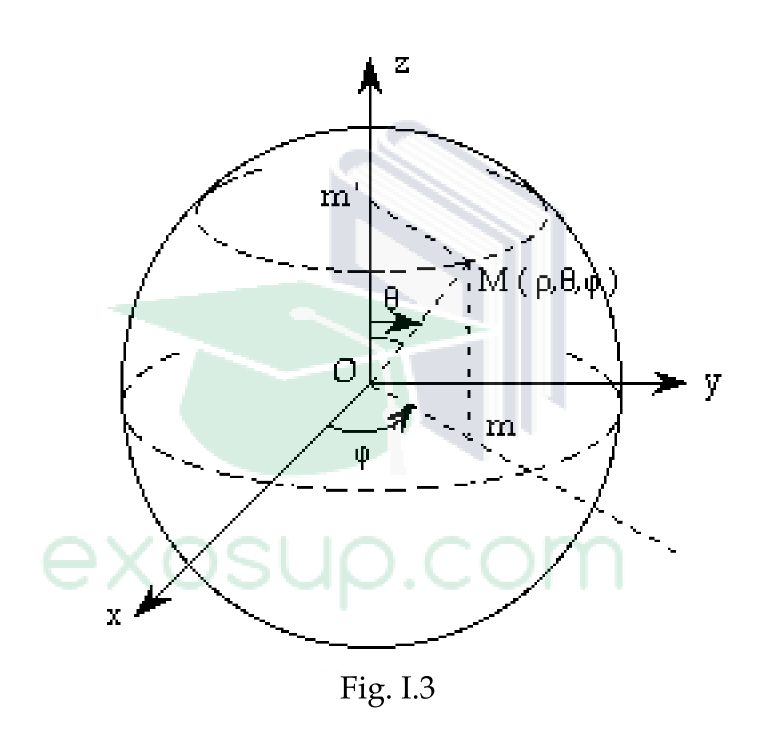


Fig. I.3

__Remarque__ :

Si (q_1,q_2,q_3) est un système de coordonnées cohérent, alors q_1,q_2,q_3 peuvent être exprimées en fonctions des coordonnées d'un autre système. Ainsi nous pouvons avoir en fonction des coordonnées cartésiennes par exemple :

$$q_1 = q_1(x,y,z)\ ;\ q_2 = q_2(x,y,z)\ ;\ q_3 = q_3(x,y,z)$$

et inversement

$$x = x(q_1,q_2,q_3)\ ;\ y = y(q_1,q_2,q_3)\ ;\ z = z(q_1,q_2,q_3)$$

dans les cas particuliers où nous prenons comme q_1,q_2,q_3 les coordonnées r,φ,z nous aurons des relations qui existent entre les deux systèmes de coordonnées cartésiennes et cylindriques :

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi$$
$$z = z$$

et inversement :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \text{Arctg}\,\frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad \Pi + \text{Arctg}\,\frac{y}{x} \quad \text{(selon les signes respectifs de x et de y)}$$

$$z = z$$

De la même manière nous avons entre les coordonnées sphériques et cartésiennes les relations :

$$x = \rho \sin \theta \cos \varphi$$
$$y = \rho \sin \theta \sin \varphi$$
$$z = \rho \cos \theta$$

et inversement :

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \text{Arctg}\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad \text{ou} \quad \Pi + \text{Arctg}\,\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad \text{(selon le signe de z)}$$

$$\varphi = \text{Arctg}\,\frac{y}{x} \quad \text{ou} \quad \Pi + \text{Arctg}\,\frac{y}{x} \quad \text{(selon les signes respectifs de x et y)}$$

Enfin entre les coordonnées sphériques et cylindriques nous avons :

$$r = \rho \sin \theta$$
$$\varphi = \varphi$$
$$z = \rho \cos \theta$$

et inversement :

$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}$

$\theta = \text{Arctg}\,\frac{\rho}{z}$ ou $\Pi + \text{Arctg}\,\frac{\rho}{z}$ (selon le signe de z)

$\varphi = \varphi$

II- Surfaces coordonnées. Courbes coordonnées

1- Définitions

a- Surface coordonnée

Soit (q_1,q_2,q_3) un système de coordonnées, on appelle "surface coordonnée" l'ensemble des points où l'une des coordonnées q_i est constante. On l'appelle également surface " iso q_i ".

b- Courbe coordonnée

L'intersection de deux surfaces coordonnées quelconques est une courbe où seule la troisième coordonnée varie; on appelle cette courbe une courbe coordonnée "q_i variable". Ainsi l'intersection des surfaces " iso q_1 " et " iso q_2 " est la courbe coordonnée "q_3 variable".

Remarques :

* Dans un système de coordonnées (q_1,q_2,q_3) quelconque tout point $M(q_1,q_2,q_3)$ est à l'intersection des trois surfaces coordonnées " iso q_i " i = 1,2,3 comme il est également à l'intersection des trois courbes q_i variable associés à i = 1,2,3.

* On dit que les courbes coordonnées sont orthogonales au point $M(q_1,q_2,q_3)$ si les tangentes en M aux trois courbes "q_i variable" pour i = 1,2,3 sont perpendiculaires deux à deux (voir figure II.1).

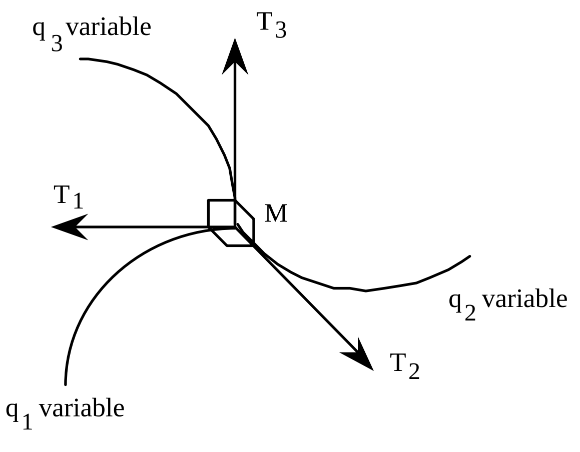


Fig. II.1

2- Application au cas de systèmes de coordonnées simples

Il s'agit de déterminer les surfaces et les courbes coordonnées que nous avons définies précédemment dans les cas des coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques successivement.

a- Surfaces et courbes coordonnées en coordonnées cartésiennes.

Soit un point M(x,y,z) défini par ses coordonnées cartésiennes; la surface $x = x_1 =$ cte (" iso x ") est le plan (π_1) parallèle au plan (Oy,Oz) passant par le point A_1 d'abscisse x_1 sur l'axe Ox. De même la surface $y = y_1 =$ cte (" iso y ") est le plan (π_2) parallèle au plan (Ox,Oz) et passant par le point B_1 d'ordonnée y_1 sur l'axe Oy. Enfin la surface $z = z_1 =$ cte (" iso z ") est le plan (π_3) parallèle au plan (Ox,Oy) et passant par le point C_1 de l'axe Oz et de cote z_1 (figure II.2).

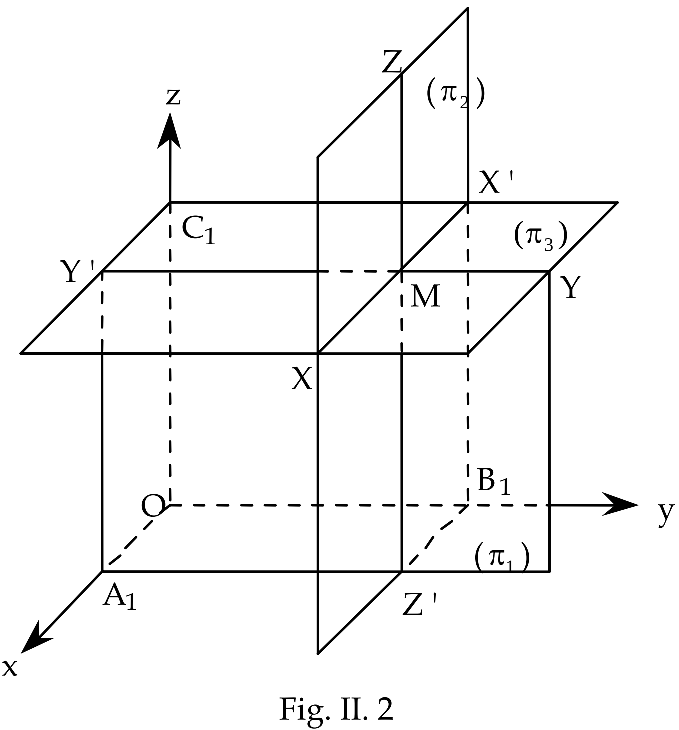


Fig. II. 2

La courbe "x variable"est l'intersection des plans (π_2) et (π_3), par conséquent c'est la droite X'X . La courbe "y variable" est l'intersection de (π_1) et (π_3) c'est donc la droite Y'Y et la courbe "z variable" est l'intersection des plans (π_1) et (π_2), soit donc la droite Z´Z. La figure II.3 présente ces courbes coordonnées au point M.

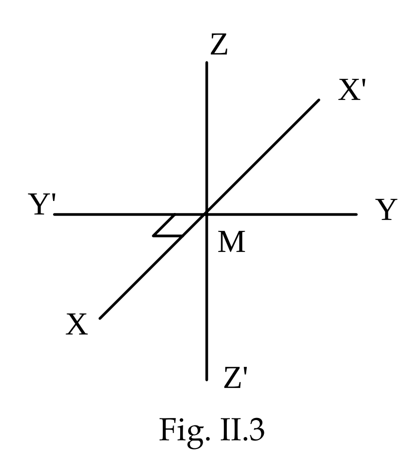


Fig. II.3

b- Surfaces et courbes coordonnées en coordonnées cylindriques

Soit M(r,φ,z) défini par ses coordonnées cylindriques (figure II.4); la surface $r = r_1 = cte$ (" iso r ") est le cylindre (C) d'axe Oz et de rayon $r = r_1 = |OM|$. La surface $\varphi = \varphi_1 = cte$ (" iso φ ") est le demi-plan (P) : (Oz ,Om). Enfin la surface $z = z_1 = cte$ (" iso z ") est le plan (P') parallèle au plan (Ox,Oy) et contenant le point M de cote $z = z_1$.

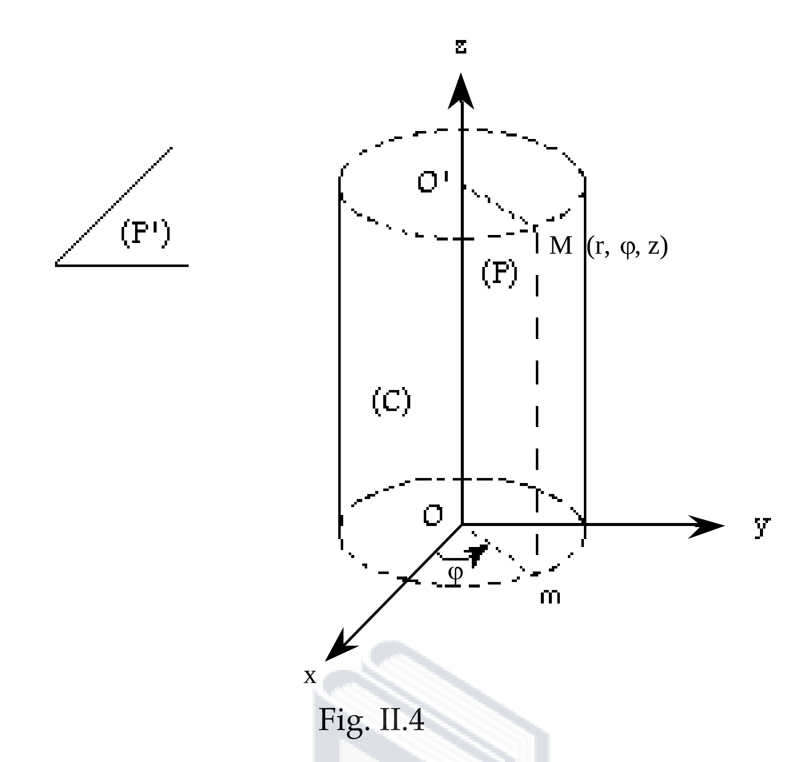


Fig. II.4

Pour les courbes coordonnées, celle qui correspond à "r variable" est l'intersection de " iso φ " et " iso z "; donc c'est la demi droite O'M. La courbe coordonnée "φ variable" est l'intersection de " iso r " et de " iso z " c'esu par conséquent le cercle de centre O' et de rayon O'M. Enfin la courbe coordonnée "z variable" est l'intersection des surfaces " iso r " et " iso φ ", c'est par conséquent la droite mM parallèle à Oz et passant par M.

La figure II.5 représente de manière simplifiée les courbes coordonnées et le point M(r,φ,z) qui se trouve à leur intersection.

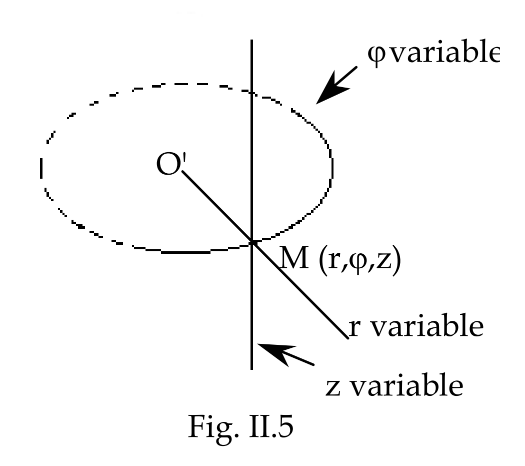


Fig. II.5

c- Surfaces et courbes coordonnées en coordonnées sphériques

Soit un point M(ρ,θ,φ) défini par ses coordonnées sphériques (figure II.6).

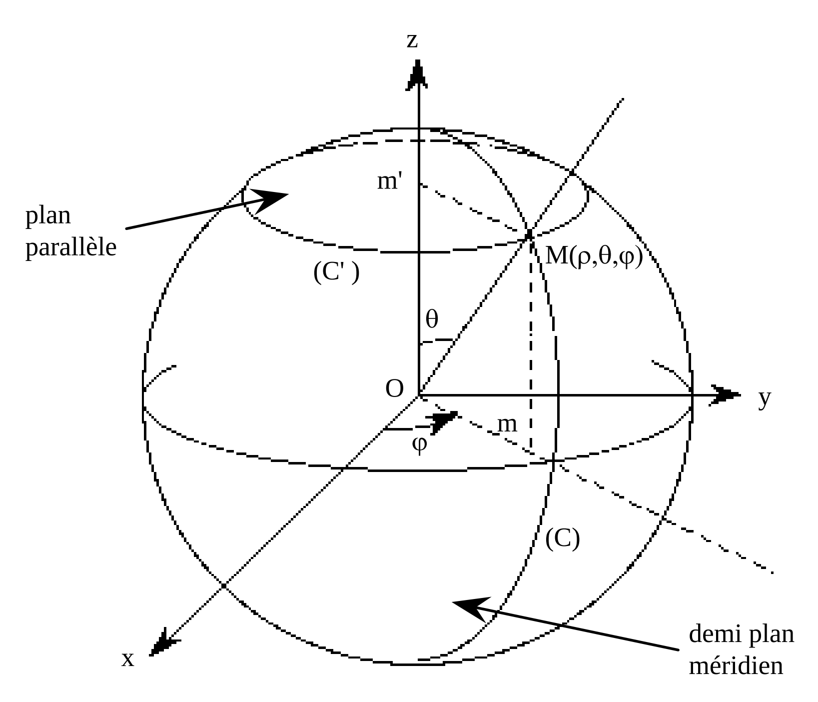


Fig. II.6

La surface $\rho = \rho_0$ = cte (" iso ρ ") est la sphère de centre O et de rayon OM = ρ_0 = cte; la surface $\theta = \theta_0$ = cte (" iso θ ") est le demi cône de sommet O et de demi angle au sommet $\theta = \theta_0$. Enfin la surface $\varphi = \varphi_0$ = cte (" iso φ ") est le demi plan méridien (Oz,Om).

La courbe coordonnées "ρ variable" est à l'intersection des surfaces " iso θ " (demi cône) et " iso φ " (demi plan méridien), c'est par conséquent (D) la demi-droite OM. La courbe coordonnée "q variable" est l'intersection des surfaces " iso ρ " et " iso φ " c'est-à-dire à l'intersection de la sphère et du demi-plan méridien, c'est par conséquent le demi-cercle (C) est appelé demi cercle méridien. Enfin la courbe coordonnée "φ variable" est à l'intersection des surfaces " iso ρ " '(sphère) et " iso θ " (demi cône), c'est donc le "cercle parallèle" (C') qui est parallèle au plan (Ox,Oy) de centre m' et de rayon m'M.

La figure II.7 représente les courbes coordonnées au voisinage du point M(ρ,θ,φ).

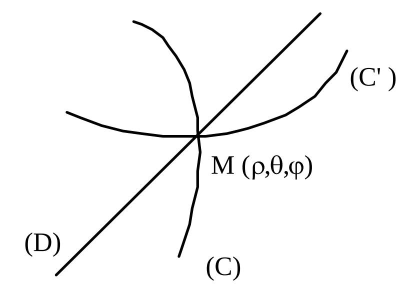


Fig. II.7

III- Systèmes d'axes locaux ("repères locaux")

1- Position du problème

Soit $\vec{A}(M)$ un champ de vecteurs défini en un point M de l'espace ; en général ce point M est un point mobile qui décrit une trajectoire. A chaque instant on peut associer au point mobile M un système d'axes dont la direction varie d'un instant à l'autre avec le point. Ce système d'axes est appelé système d'axes locaux ou "repère local". Le champ de vecteurs $\vec{A}(M)$ pourra alors se décomposer à chaque instant sur les axes locaux.

A titre d'exemple un point matériel M en mouvement possède à chaque instant une vitesse $\vec{v}(M)$ (champ de vecteurs) ; cette vitesse peut s'écrire comme la résultante de ses composantes selon un système d'axes dont l'origine est placée en ce point M (ou en un point quelconque) et les directions dépendent de la position du point.

Il s'agit donc de préciser ces directions ainsi que les autres caractéristiques du "repère local" dans le cas d'un système de coordonnées quelconques (q_1,q_2,q_3), puis dans les cas particulier de systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.

2- Détermination du "repère local" dans le cas général

a- Direction et sens des axes locaux

Soit un système de coordonnées (q_1,q_2,q_3) et un point $M(q_1,q_2,q_3)$; ce point est à l'intersection des trois courbes coordonnées "q_i variables" (figure III.1).

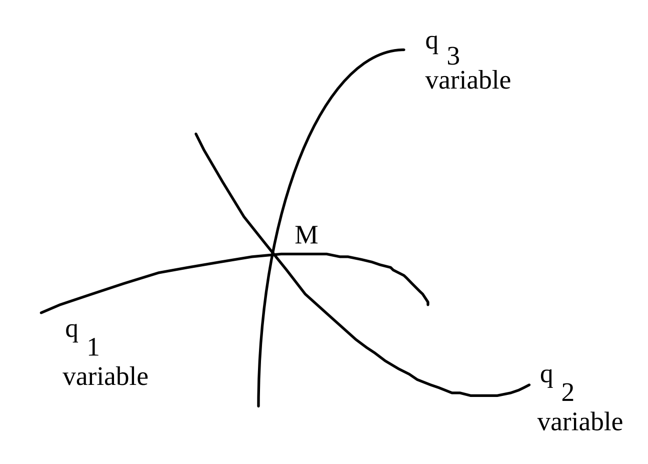


Fig. III.1

Considérons un déplacement infinitésimal $(\vec{dM})_{q_1}$ sur la courbe coordonnée q_1 variable et supposons que $(\vec{dM})_{q_1}$ soit suffisamment petit pour qu'il soit confondu avec la tangente à la courbe en $M(q_1,q_2,q_3)$

Nous pouvons écrire :

$$(\vec{dM})_{q_1} = (\vec{MM_1})$$

avec $M(q_1,q_2,q_3)$ et $M_1(q_1,dq_1,q_2,q_3)$ deux points sur cette tangente (figure III.2) ; l'élément différentiel $(\vec{dM})_{q_1}$ s'écrit alors :

$$(\vec{dM})_{q_1} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_1}\, dq_1$$

ainsi $\dfrac{(\vec{dM})q_1}{dq_1} = \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial q_1}$ est un vecteur tangent en M à la courbe coordonnée "q_1 variable".

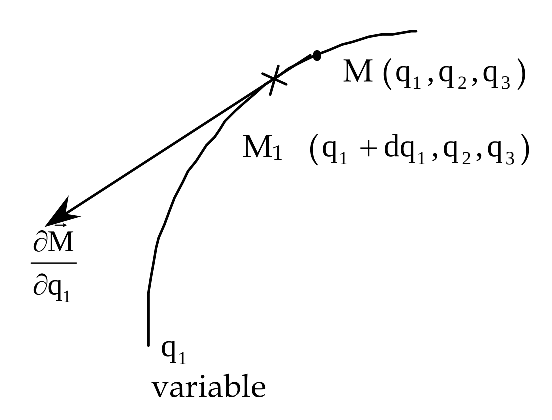


Fig. III.2

En considérant successivement deux autres déplacements infinitésimaux $(\vec{dM})_{q_2} = (\vec{MM_2})$ et $(\vec{dM})_{q_3} = (\vec{MM_3})$ respectivement sur les courbes coordonnées "q_2 variable" et "q_3 variable", nous déduisons de la même manière que précédemment, que les vecteurs :

$$\frac{(d\vec{M})_{q_2}}{dq_2} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_2}$$

et $$\frac{(d\vec{M})_{q_3}}{dq_3} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_3}$$

sont tangents en M à ces deux courbes coordonnées (figure III.3).

L'ensemble des trois vecteurs $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_2}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_3}$ qui dépendent de la position du point $M(q_1,q_2,q_3)$ définit un système d'axes locaux ou "repère local" associé au système de coordonnées (q_1,q_2,q_3). Le caractère "local" de ces axes vient du fait qu'ils dépendent justement de la position du point $M(q_1,q_2,q_3)$ à chaque instant.

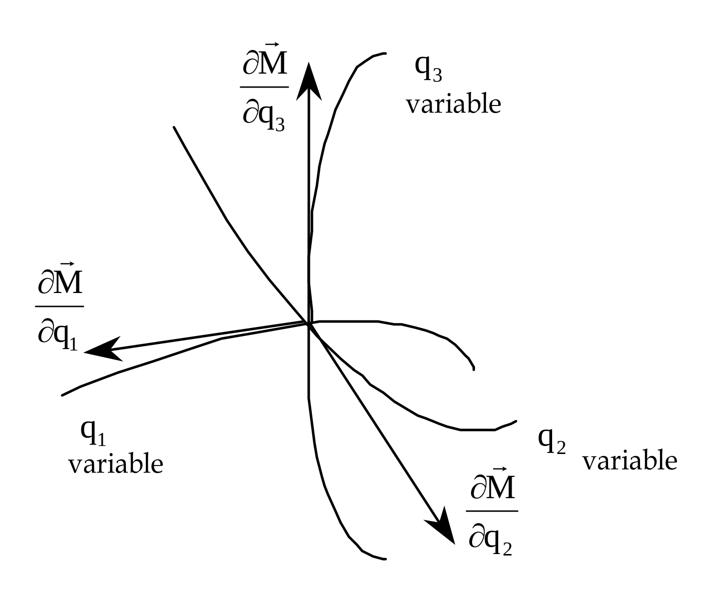


Fig. III.3

<u>Remarques</u> :

* Tout champ de vecteurs $\vec{A}(M)$ peut s'écrire comme la somme de trois composantes qui sont les projections de $\vec{A}(M)$ sur les axes locaux; ainsi nous pouvons écrire :

$$\vec{A}(M) = \vec{A}_{q_1} + \vec{A}_{q_2} + \vec{A}_{q_3}$$

avec $\vec{A}_{q_1}$ la projection de $\vec{A}(M)$ sur la direction $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_1}$, c'est-à-dire sur la tangente en M à la courbe coordonnée "q_1 variable".

* Si nous considérons un déplacement infinitésimal quelconque $d\vec{M}$ de $M(q_1,q_2,q_3)$ nous pouvons donc écrire également :

$$d\vec{M} = (d\vec{M})_{q_1} + (d\vec{M})_{q_2} + (d\vec{M})_{q_3}$$

avec $(d\vec{M})_{q_i} = \frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i} dq_i$ projection de $d\vec{M}$ sur la tangente en M à la courbe coordonnée "$q_i$variable".

* L'origine d'un système d'axes locaux peut être placée en un point quelconque de l'espace une fois que leur direction a été déterminée à chaque instant.

b- Vecteurs unitaires de base du système d'axes locaux

Nous avons défini trois vecteurs indépendants $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_2}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_3}$ qui caractérisent les directions du système d'axes locaux. Nous pouvons leur associer des vecteurs unitaires de même sens et même direction en les normalisant. Ainsi, les vecteurs unitaires sur $\vec{e}_{q_i}$ sur la direction $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_i}$ sont définis successivement par :

$$\vec{e}_{q_1} = \frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_1}}{\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_1}\right|} \qquad \vec{e}_{q_2} = \frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_2}}{\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_2}\right|} \qquad \vec{e}_{q_3} = \frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_3}}{\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_3}\right|}$$

$(\vec{e}_{q_1}, \vec{e}_{q_2}, \vec{e}_{q_3})$ est une base de vecteurs unitaires du "repère local".

<u>**Remarques**</u> :

* Si les courbes coordonnées sont orthogonales, c'est-à-dire si au point M les directions $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_1}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_2}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial q_3}$ sont perpendiculaires deux à deux, alors la base ($\vec{e}_{q_1}$, $\vec{e}_{q_2}$, $\vec{e}_{q_3}$) est orthonormée. Nous avons alors :

$$| \vec{e}_{q_i} | = 1 \quad \text{et} \quad \vec{e}_{q_i} . \vec{e}_{q_j} = 0 \quad \text{pour } i \neq j$$

Si, en plus nous avons :

$$\vec{e}_{q_1} \wedge \vec{e}_{q_2} = \vec{e}_{q_3}$$

$$\vec{e}_{q_2} \wedge \vec{e}_{q_3} = \vec{e}_{q_1}$$

$$\vec{e}_{q_3} \wedge \vec{e}_{q_1} = \vec{e}_{q_2}$$

la base ($\vec{e}_{q_1}$, $\vec{e}_{q_2}$, $\vec{e}_{q_3}$) est alors directe.

* La base du système d'axes locaux étant définie, nous pouvons écrire tout champ de vecteur $\vec{A}(M)$ sous la forme :

$$\vec{A}(M) = A_{q_1} \vec{e}_{q_1} + A_{q_2} \vec{e}_{q_2} + A_{q_3} \vec{e}_{q_3}$$

avec $\vec{A}_{q_1} = A_{q_1} \vec{e}_{q_1}$ et A_{q_1} représentant la valeur algébrique de la projection de $\vec{A}(M)$ sur la direction de $\vec{e}_{q_i}$, c'est-à-dire :

$$\vec{A}(M) = (\vec{A}(M) . \vec{e}_{q_1})\, \vec{e}_{q_1} + (\vec{A}(M) . \vec{e}_{q_2})\, \vec{e}_{q_2} + (\vec{A}(M) . \vec{e}_{q_3})\, \vec{e}_{q_3}$$

3- Systèmes d'axes locaux en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques

a- "Repère local" en coordonnées cartésiennes ($q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$)

Soit un système de coordonnées cartésiennes (O,x y z) et $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ une base orthonormée directe associée à ce système.

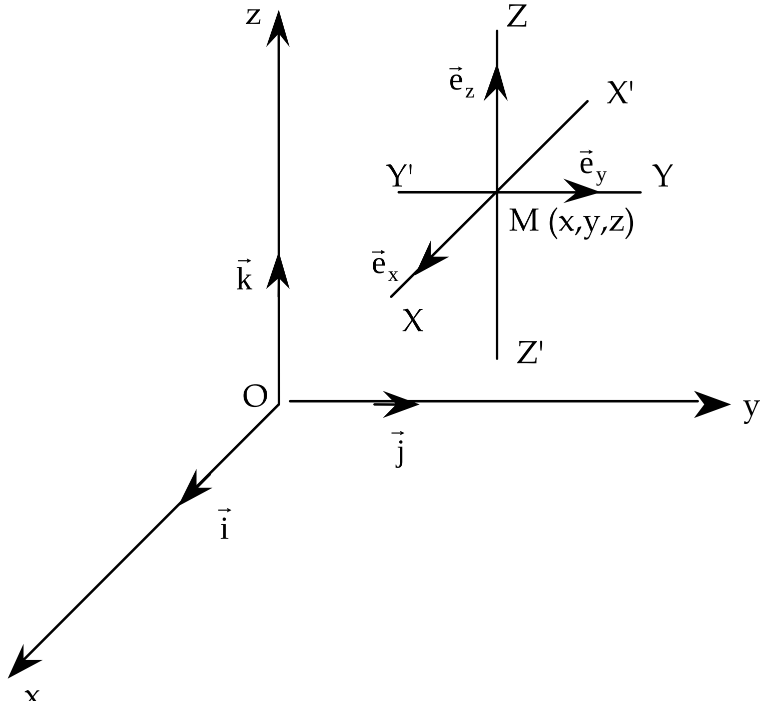


Fig. III.4

Soit M(x,y,z) un point de l'espace tel que :

$$\vec{OM} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

Nous nous proposons de déterminer le "repère local" en M en appliquant la démarche suivie au § III.2 précédent.

Le point M(x,y,z) est à l'intersection des trois droites X'X, Y'Y, Z'Z qui correspondent respectivement aux trois courbes coordonnées " x variable " , " y variable " et " z variable " (figure III.4).

Considérons sur la courbe " x variable " (droite X'X) un déplacement élémentaire $(d\vec{M})_X$; celui-ci est porté par la tangente en M à la courbe coordonnée "x variable" (c'est-à-dire la droite X'X passant par le point M est parallèle à Ox). Nous pouvons donc écrire :

$$(d\vec{M})_X = dx\,\vec{i}$$

Par ailleurs d'après ce qui précède (§ III.2) et en faisant $q_1 = x$ nous avons :

$(d\vec{M})_X = \dfrac{\partial \vec{M}}{\partial x} dx$, avec $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial x} = \vec{i}$ si on identifie les deux expressions de $(d\vec{M})_X$. Dans ce cas $\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial x}$ définit directement le premier vecteur unitaire $\vec{e}_x$ du repère local, en effet :

$$\vec{e}_x = \frac{\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial x}}{\left|\dfrac{\partial \vec{M}}{\partial x}\right|} = \frac{\vec{i}}{|\vec{i}|} = \vec{i}$$

En refaisant de même sur les autres courbes coordonnées, nous obtenons :

$$\vec{e}_y = \vec{j} \quad \text{et} \quad \vec{e}_Z = \vec{k}$$

Le repère local en M(x,y,z) est donc défini à partir de ses vecteurs de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_Z)$ qui constituent un trièdre orthonormé et direct.

<u>Remarques</u> :

* Tout champ de vecteur $\vec{A}(M)$ peut être décomposé à chaque instant selon ses composantes sur le "repère local" en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{A}(M) = A_X\, \vec{e}_x + A_y\, \vec{e}_y + A_Z\, \vec{e}_Z$$

avec $A_X = \vec{A}(M).\, \vec{e}_x$; $A_y = \vec{A}(M).\, \vec{e}_y$; $A_Z = \vec{A}(M).\, \vec{e}_Z$

* En particulier un déplacement élémentaire quelconque du point M dans l'espace s'écrit :

$$d\vec{M} = (d\vec{M})_X + (d\vec{M})_y + (d\vec{M})_Z$$

$$= dx\, \vec{e}_x + dy\, \vec{e}_y + dz\, \vec{e}_Z\, \vec{e}_Z$$

b- Repère local en coordonnées cylindriques ($q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$)

Soit un point M(r,φ,z) défini par ses coordonnées cylindriques. Ce point est à l'intersection des trois courbes coordonnées"r variable","φ variable" et "z variable", (figure III.5)

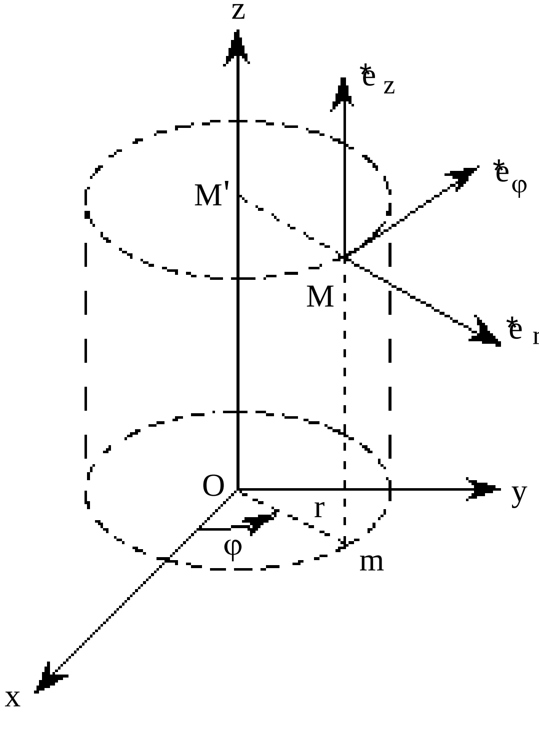


Fig. III.5

La courbe " r variable " est la demi-droite M'M . Considérons le vecteur unitaire $\vec{e}_r$ sur cette direction et orienté dans le sens croissant de r c'est-à-dire dans le sens croissant de l'axe $\overrightarrow{M'M}$. Un déplacement élémentaire de M sur la courbe coordonnée " r variable " lorsque r varie de dr s'écrit :

$$(d\vec{M})_r = dr\ \vec{e}_r$$

Par ailleurs nous avons :

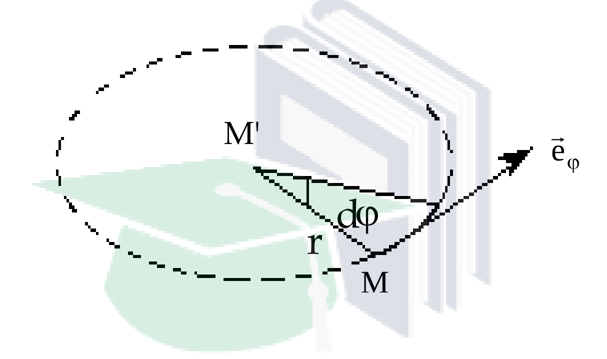
$$(d\vec{M})_r = \frac{\partial \vec{M}}{\partial r} dr$$

en identifiant les deux expressions précédentes nous obtenons :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial r} = \vec{e}_r$$

ce qui permet d'avoir la direction d'un axe du " repère local " en l'occurence celle de $\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}$ qui est celle de $\vec{e}_r$, et de définir le vecteur unitaire sur cette direction par $\frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}}{\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial r}\right|}$, c'est-à-dire par $\vec{e}_r$.

Reprenons la même démarche pour la courbe coordonnée " φ variable " , c'est-à-dire le cercle de centre M' et de rayon M'H = r. Nous définissons sur la tangente en M à ce cercle un vecteur unitaire $\vec{e}_\varphi$ orienté dans le sens croissant de φ (figure III.6). Soit $(d\vec{M})_\varphi$ un déplacement élémentaire de M sur la courbe coordonnée " φ variable ", lorsque φ varie de dφ. Supposons que dφ est suffisamment petit pour que $(d\vec{M})_\varphi$ soit porté par la tangente .



Ainsi nous avons :

$$(d\vec{M})_\varphi = r\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

par ailleurs

$$(d\vec{M})_\varphi = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} d\varphi$$

d'où

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = r\, d\varphi\, \vec{e}_\varphi$$

ce qui permet de déduire que la seconde direction du système d'axes locaux est celle de $\vec{e}_\varphi$ et le vecteur unitaire sur cette direction est donné par $\frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}\right|}$, c'est-à-dire par $\vec{e}_\varphi$.

Enfin sur la courbe coordonnée " z variable " qui est la droite mM parallèle à oz, définissons un vecteur unitaire $\vec{e}_z$ orienté dans le sens croissant de z, c'est-à-dire dans le sens croissant de l'axe $\overrightarrow{mM}$. Soit $(d\vec{M})_z$ un déplacement élémentaire de M sur la courbe coordonnée " z variable " lorsque z varie de dz; nous avons alors :

$$(d\vec{M})_z = dz\ \vec{e}_z$$

par ailleurs nous avons :

$$(d\vec{M})_z = \frac{\partial \vec{M}}{\partial z} dz$$

d'où

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial z} = \vec{e}_z$$

et la dernière direction du système d'axes locaux est donc déterminée; c'est celle de $\vec{e}_z$, puisque le vecteur unitaire associé est $\dfrac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial z}}{\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial z}\right|} = \vec{e}_z$

Ainsi le "repère local" (système d'axes locaux) en coordonnées cylindriques est entièrement déterminé. La base de vecteurs unitaires $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ que nous avons associée au repère local est orthonormée (les courbes coordonnées étant orthogonales en M) et directe.

Remarques :

* Tout champ de vecteurs $\vec{A}(M)$ peut s'écrire à l'aide de ses composantes dans le système d'axes locaux :

$$\vec{A}(M) = A_r\ \vec{e}_r + A_\varphi\ \vec{e}_\varphi + A_z\ \vec{e}_z$$

avec

$A_r = \vec{A}(M) .\ \vec{e}_r$ composante radiale

$A_\varphi = \vec{A}(M) .\ \vec{e}_\varphi$ composante orthoradiale

$A_z = \vec{A}(M) .\ \vec{e}_z$ composante axiale

* Un déplacement élémentaire quelconque $d\vec{M}$ s'écrit alors sous la forme d'une somme de ses trois composantes :

$$d\vec{M} = (d\vec{M})_r + (d\vec{M})_\varphi + (d\vec{M})_z$$

$$= dr\ \vec{e}_r + r\ d\varphi\ \vec{e}_\varphi + dz\ \vec{e}_z$$

c- Repère local en coordonnées sphériques : ($q_1 = \rho$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$)

Soit un point M(ρ,θ,φ) défini par ses coordonnées sphériques. Ce point est à l'intersection des trois courbes coordonnées " ρ variable ", " θ variable " et " φ variable " (figure III.7) .

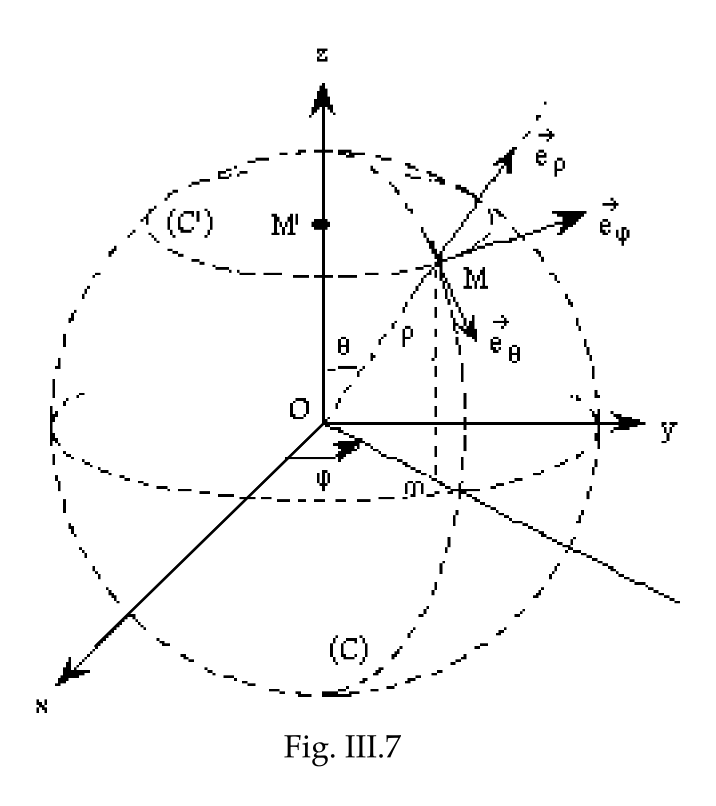


Fig. III.7

La courbe coordonnée ρ variable est la demi-droite OM ; définissons $\vec{e}_\rho$ vecteur unitaire sur OM orienté dans le sens croissant de ρ = OM c'est-à-dire de O vers M . Soit un déplacement élémentaire $(d\vec{M})_\rho$ sur cette courbe coordonnée lorsque ρ varie de dρ

$$(d\vec{M})_\rho = d\rho\ \vec{e}_\rho$$

$$(d\vec{M})_\rho = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho} d\rho$$

en identifiant les deux expressions, nous déduisons :

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho} = \vec{e}_\rho$$

ce qui permet la détermination de la direction de $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho}$, c'est-à-dire celle de l'axe local associé à la coordonnée ρ au point M.

La courbe coordonnée " θ variable " est de demi cercle méridien (C) passant par M ; soit $\vec{e}_\rho$ le vecteur unitaire porté par la tangente en M au demi cercle (C) et tel que son sens correspond au sens croissant de l'angle $(\vec{Oz}, \vec{OM})$ (figure III.8).

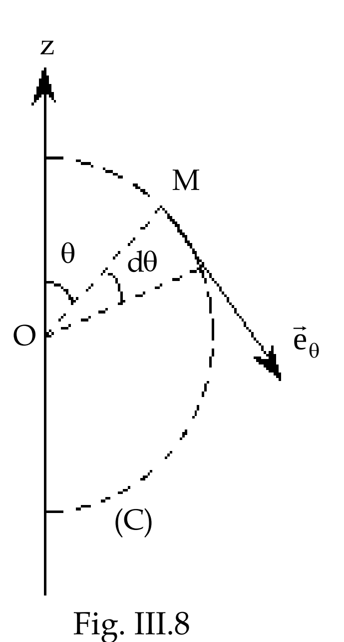


Fig. III.8

Soit $(d\vec{M})_\theta$ un déplacement élémentaire sur la courbe (C) lorsque la variable θ varie de dθ ; nous avons :

$$(d\vec{M})_\theta = \rho\, d\theta\, \vec{e}_\theta$$

par ailleurs

$$(d\vec{M})_\theta = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} d\theta$$

d'où

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta} = \rho \ \vec{e}_\theta$$

La direction du second axe du "repère local" est donnée par celle de $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}$, c'est-à-dire par la direction de $\vec{e}_\theta$ et le vecteur unitaire associé est défini par $\frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}}{\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}\right|} =$

$\rho \ \frac{\vec{e}_\theta}{\rho} = \vec{e}_\theta$

Enfin pour la troisième direction du "repère local" nous considérons la courbe coordonnée " φ variable " qui est le cercle parallèle (C') de centre M'. Soit $\vec{e}_\varphi$ le vecteur unitaire porté par la tangente à (C') au point M et orienté dans le sens croissant de φ et soit $(d\vec{M})_\varphi$ le vecteur déplacement élémentaire du point M sur (C') lorsque φ varie de $d\varphi$ (figure III.9).

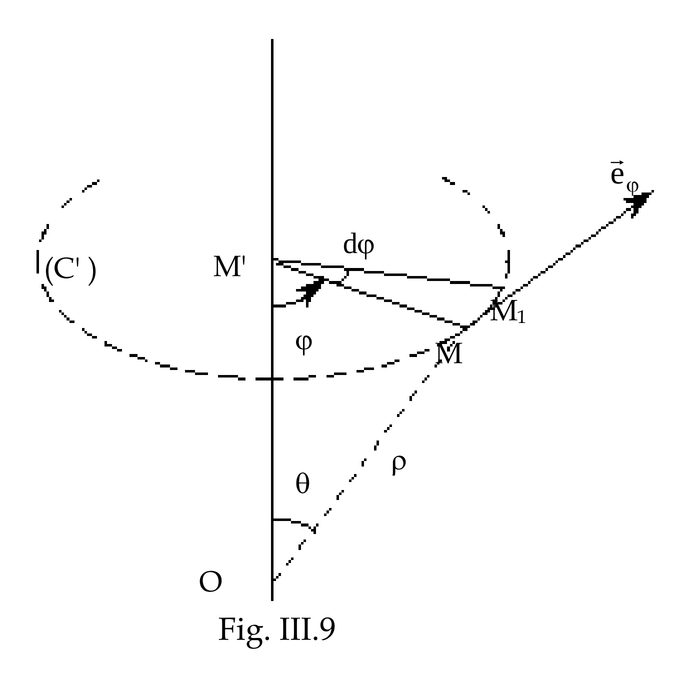


Fig. III.9

$$(d\vec{M})_\varphi = \overrightarrow{MM_1}$$

$$= |MM'| \, d\varphi \ \vec{e}_\varphi$$

$$= \rho \sin\theta \, d\varphi \; \vec{e}_\varphi$$

par ailleurs

$$(d\vec{M})_\varphi = \frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} d\varphi$$

d'où

$$\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi} = \rho \sin\theta \; \vec{e}_\varphi$$

La direction du troisième axe local est celle de $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$, donc celle de $\vec{e}_\varphi$. Le vecteur unitaire associé à cette direction est :

$$\frac{\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}}{\left|\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}\right|} = \frac{r \sin\theta}{r \sin\theta} \vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi$$

Ainsi le "repère local" au point M en coordonnées sphériques a pour direction des axes celles de $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \rho}$, $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \theta}$ et $\frac{\partial \vec{M}}{\partial \varphi}$ respectivement, (ces directions étant orthogonales), et a pour base orthonormée et directe, le système $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ tel qu'il a été défini.

Remarques :

* Tout champ de vecteurs $\vec{A}(M)$ peut s'écrire comme la résultante de ses composantes selon les axes locaux :

$$\vec{A}(M) = A_\rho \; \vec{e}_\rho + A_\theta \; \vec{e}_\theta + A_\varphi \; \vec{e}_\varphi$$

avec

$A_\rho = \vec{A}(M) . \vec{e}_\rho$ composante radiale de $\vec{A}(M)$

$A_\theta = \vec{A}(M) . \vec{e}_\theta$ composante de $\vec{A}(M)$

$A_\varphi = \vec{A}(M) . \vec{e}_\varphi$ composante de $\vec{A}(M)$

Si $\vec{A}(M) = \vec{OM}$ nous avons dans ce cas :

$$\vec{OM} = \rho\ \vec{e}_\rho$$

avec $\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\theta,\varphi)$ fonction des paramètres θ et φ.

* Un déplacement élémentaire $d\vec{M}$ quelconque s'écrit dans la base $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sous la forme :

$$d\vec{M} = (d\vec{M})_\rho + (d\vec{M})_\theta + (d\vec{M})_\varphi$$

$$= d\rho\ \vec{e}_\rho + \rho\ d\theta\ \vec{e}_\theta + \rho \sin\theta\ d\varphi\ \vec{e}_\varphi$$

d- Passage d'un repère local à un autre

Nous prouvons passer de la base en coordonnées cartésiennes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ à la base en coordonnées cylindriques $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ par les relations :

$$\vec{e}_r = (\vec{e}_r.\vec{e}_x)\ \vec{e}_x + (\vec{e}_r.\vec{e}_y)\vec{e}_y + (\vec{e}_r.\vec{e}_z)\vec{e}_z$$
$$= \cos\varphi\ \vec{e}_x + \sin\varphi\ \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_\varphi = (\vec{e}_\varphi.\vec{e}_x)\vec{e}_x + (\vec{e}_\varphi.\vec{e}_y)\vec{e}_y + (\vec{e}_\varphi.\vec{e}_z)\vec{e}_z$$
$$= -\sin\varphi\ \vec{e}_x + \cos\varphi\ \vec{e}_y$$

$$\vec{e}_z = \vec{e}_z$$

Ainsi, nous remarquons que nous avons $\vec{e}_r = \vec{e}_r(\varphi)$ et $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi)$.

De même, les vecteurs de la base en coordonnées sphériques peuvent s'exprimer en fonction des vecteurs de base en coordonnées cartésiennes par les relations :

$$\vec{e}_\rho = (\vec{e}_\rho.\vec{e}_x)\vec{e}_x + (\vec{e}_\rho.\vec{e}_y)\ \vec{e}_y + (\vec{e}_\rho.\vec{e}_z)\ \vec{e}_z$$
$$= \sin\theta\cos\varphi\ \vec{e}_x + \sin\theta\sin\varphi\ \vec{e}_y + \cos\theta\ \vec{e}_z$$

$$\vec{e}_\theta = (\vec{e}_\theta.\vec{e}_x)\ \vec{e}_x + (\vec{e}_\theta.\vec{e}_y)\ \vec{e}_y + (\vec{e}_\theta.\vec{e}_z)\ \vec{e}_z$$

$= \cos\theta \cos\varphi\ \vec{e}_x + \cos\theta \sin\varphi\ \vec{e}_y - \sin\theta\ \vec{e}_z$

$$\vec{e}_\varphi = (\vec{e}_\varphi . \vec{e}_x)\ \vec{e}_x + (\vec{e}_\varphi . \vec{e}_y)\vec{e}_y + (\vec{e}_\varphi . \vec{e}_z)\ \vec{e}_z$$
$$= \sin\varphi\ \vec{e}_x + \cos\varphi\ \vec{e}_y$$

Nous remarquons dans ce cas que nous avons $\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\theta,\varphi)$, $\vec{e}_\theta = \vec{e}_\theta(\theta,\varphi)$ et $\vec{e}_\varphi = \vec{e}_\varphi(\varphi)$.

Les représentations planes sur les figures III.10 et 11 permettent de trouver facilement les relations précédentes.

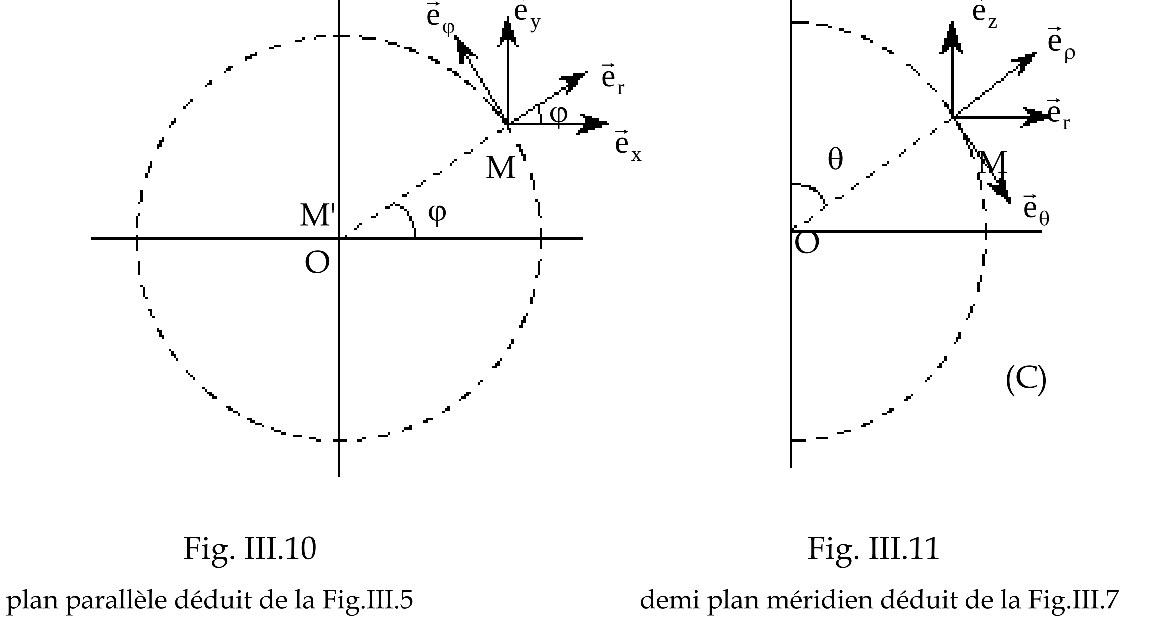


Fig. III.10
plan parallèle déduit de la Fig.III.5

Fig. III.11
demi plan méridien déduit de la Fig.III.7

4- Cas particulier : repère local de Serret Frenet et formules associées.

a - Présentation

Soit une courbe orientée représentant la trajectoire d'un point matériel M . Dans les paragraphes précédents nous avons défini des systèmes d'axes locaux qui sont liés à la position du point $M(q_1,q_2,q_3)$, l'élément trajectoire n'intervenant pas c'est à dire que si le point $M(q_1,q_2,q_3)$ est sur la trajectoire (C_1) ou (C_2) par exemple, le repère local en ce point est le même car il est lié à la seule position du point. Le repère local de SERRET FRENET que nous allons introduire est d'un type différent des autres dans la mesure où ce système d'axes

locaux dépend à la fois de la trajectoire du point matériel et de la position de ce point sur la trajectoire et non pas seulement de la position du point dans un repère donné.

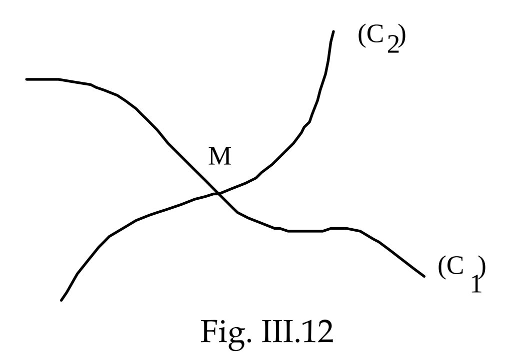


Fig. III.12

Ainsi si on connait les caractéristiques de la trajectoire on peut alors définir en chaque point et de manière unique un système d'axes locaux particulier appelé repère de SERRET FRENET. Les composantes dans ce repère sont appelées composantes intrinsèques.

b - Eléments caractéristiques d'une courbe (trajectoire)

La connaissance des caractéristiques d'une courbe quelconque (c'est-à-dire qui n'est pas forcément plane), telles que les notions de plan osculateur, normale principale, binormale, rayon de courbure, rayon de torsion, etc, sont nécessaires pour la détermination du trièdre de SERRET FRENET et les relations entre les vecteurs unitaires de ce trièdre, aussi avons nous développé en paragraphe annexe toutes ces notions.

c - Trièdre et base de SERRET FRENET

Soit (C) une courbe trajectoire et M un point de cette courbe. On considère la direction MT de la tangente à (C) au point M et sur cette direction un vecteur unitaire $\vec{\tau}$ orienté dans le sens de parcours de la trajectoire (figure III.13).

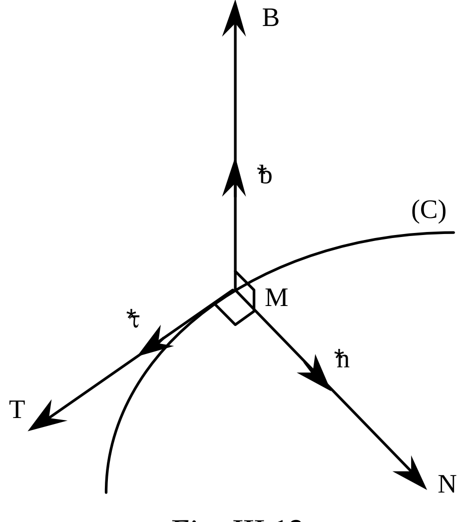


Fig. III.13

Par ailleurs, soit $\vec{MN}$ la direction de la normale principale à la courbe (C) au point M, c'est-à-dire la perpendiculaire à $\vec{MT}$ qui est contenue dans le plan osculateur à la courbe (C) au même point, on considère alors sur cette normale principale un vecteur unitaire $\vec{n}$ orienté positivement vers le centre de courbure de (C).

Enfin soit $\vec{MB}$ la direction de la binormale à la courbe au point M , c'est-à-dire la perpendiculaire au plan $(\vec{MT}, \vec{MN})$ et on considère un vecteur unitaire $\vec{b}$ porté par $(\vec{MB})$ et orienté de telle manière que $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ soit un trièdre direct.

Ainsi le trièdre $(\vec{MT}, \vec{MN}, \vec{MB})$ définit le trièdre de SERRET-FRENET et $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ constitue la base orthonormée directe qui lui est associée , c'est-à-dire nous avons :

$$\vec{\tau} \wedge \vec{n} = \vec{b}$$
$$\vec{n} \wedge \vec{b} = \vec{\tau}$$

$$\vec{b} \wedge \vec{\tau} = \vec{n}$$

d - Formules de SERRET-FRENET

Soit $(\vec{\tau}, \vec{n}, \vec{b})$ la base de SERRET-FRENET et un point M d'abscisse curviligne "s" sur la courbe trajectoire (C); le rayon de courbure R(s) et le rayon de torsion T(s) de la courbe (C) au point M sont définis (voir annexe A) par les relations :

$$\frac{d\vec{\tau}}{ds} = \frac{\vec{n}}{R(s)} \qquad (1)$$

$$\frac{d\vec{b}}{ds} = - \frac{\vec{n}}{T(s)} \qquad (2)$$

A partir de ces relations nous pouvons déduire l'expression de $\frac{d\vec{n}}{ds}$. En effet :

$$\vec{n} = \vec{b} \wedge \vec{\tau}$$

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{d}{ds}(\vec{b} \wedge \vec{\tau})$$

$$= \frac{d\vec{n}}{ds} \wedge \vec{\tau} + \vec{b} \wedge \frac{d\vec{\tau}}{ds}$$

compte tenu des relations (1) et (2) nous avons :

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = - \frac{\vec{n}}{T(s)} \wedge \vec{\tau} + \vec{b} \wedge \frac{\vec{n}}{R(s)}$$

d'où (3)

$$\frac{d\vec{n}}{ds} = \frac{\vec{b}}{T(s)} - \frac{\vec{\tau}}{R(s)}$$

Les formules (1), (2), (3) sont appelées formules de SERRET-FRENET.

IV- Caractéristiques fondamentales de la cinématique

La notion de temps ayant été introduite précédemment nous présentons les notions de trajectoire, de vitesse et d'accélération.

1- Trajectoire - Equations paramétriques du mouvement

a - Trajectoire

Soit un mobile M et O une origine fixe. A chaque instant t la position de M est donnée par le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$. L'ensemble des positions du point M lorsque t varie de manière continue constitue une courbe (C) qui représente la trajectoire du mobile.

b- Equations paramétriques

Soit un système de coordonnées (q_1,q_2,q_3); la position d'un point matériel M par rapport à un repère est donnée par ses coordonnées $M(q_1,q_2,q_3)$. Si le point M décrit une courbe trajectoire (C), les coordonnées q_1,q_2,q_3 sont en général des fonctions d'un paramètre auxiliaire t qui détermine la position de M sur cette trajectoire. Les équations du mouvement de M sur la trajectoire (C) sont alors :

$$q_1 = f(t)$$

$$q_2 = g(t)$$

$$q_3 = h(t)$$

<u>**Exemples :**</u>

* Dans le système de coordonnées cartésiennes x,y,z un point M qui évolue sur une trajectoire circulaire de rayon R dans le plan xOy (voir figure IV.1) a pour équations paramétriques de mouvement :

$$x = R \cos \omega t$$

$$y = R \sin \omega t$$

$$z = 0$$

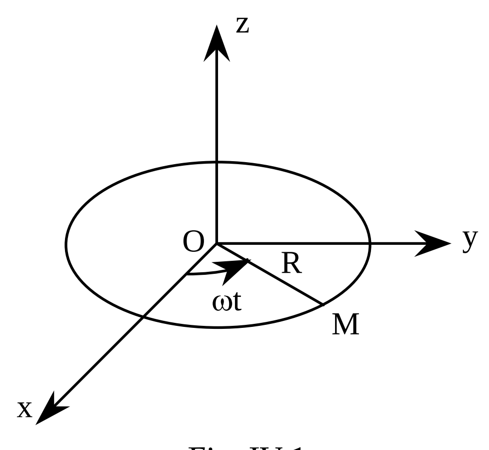


Fig. IV.1

Dans le système de coordonnées cylindriques r, φ, z le même mouvement du point M est décrit par les équations paramétriques :

$r = R = cte$

$\varphi(t) = \omega t$

$z = 0$

Remarques :

* En mécanique le paramètre t représente souvent le temps; cependant d'autres paramètres sont également utilisés dans les équations paramétriques. Par ailleurs, toute courbe trajectoire associée à un mouvement peut être représentée paramétriquement d'une infinité de manières, en substituant au paramètre t consideré initialement, un autre qui en est déduit par une relation quelconque. Ainsi dans l'exemple précédent du système de coordonnées cartésiennes au lieu de t on peut prendre $\varphi = \omega t$ et on aura avec le paramètre φ :

$x = R \cos \varphi$

$y = R \sin \varphi$

$z = 0$

* En éliminant le paramètre auxiliaire (quel qu'il soit) entre les équations paramétriques nous pouvons trouver la ou les relation (s) reliant les coordonnées des points de la courbe trajectoire. Ainsi dans le cas simple précédent

$x = R \cos \omega t$

$y = R \sin \omega t$

$z = 0$

l'élimination de t nous donne :

$x^2 + y^2 = R^2$ et $z = 0$

qui représente l'équation d'un cercle dans le plan xOy.

Dans le cas plus général d'une courbe trajectoire gauche, l'élimination du paramètre t permet de passer des équations paramétriques x(t), y(t), z(t) (si on se place dans le système de coordonnées cartésiennes par exemple) aux courbes exprimées par l'intersection de deux surfaces. On obtient alors deux équations reliant x,y,z :

$$f_1(x,y,z) = 0 \quad (1)$$

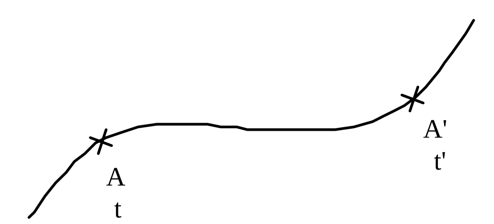
$$g_1(x,y,z) = 0 \quad (2)$$

Signalons que ceci n'implique pas que l'intersection des deux surfaces représentées par (1) et (2) soit exclusive aux seuls points de la courbe (C). D'autres points autres que ceux qui constituent (C) peuvent vérifier également simultanement (1) et (2). Donc des conditions supplémentaires sont nécessaires pour que les équations (1) et (2) soient absolument équivalentes aux équations paramétriques x(t), y(t), z(t).

2- Vitesse d'un point matériel

a- Vitesse moyenne

Soit un point matériel M en mouvement dans un référentiel (R). A l'instant t le point est en A et à un instant t' il est en A'.



La vitesse moyenne du mobile entre t et t' est par définition :

$$\vec{v}_{moy}(M) = \frac{\overrightarrow{AA'}}{t'-t} = \frac{\overrightarrow{\Delta A}}{\Delta t} \text{ avec } \quad \overrightarrow{\Delta A} = \overrightarrow{AA'} \text{ et } \Delta t = t' - t$$

Cette vitesse moyenne ne dépend que du point de départ et du point d'arrivée. Cette vitesse moyenne est peu utilisée du fait qu'elle ne rende pas compte de l'évolution de la vitesse entre les instants t et t'.

b- vitesse instantanée

La vitesse instantanée d'un mobile M à un instant t, par rapport à un référentiel (R) est la limite de la vitesse moyenne précédemment définie, lorsque Δt = t'-t tend vers 0.

$$\vec{v}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \vec{v}_{moy}(M) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{AA'}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OA'} - \overrightarrow{OA}}{\Delta t} \qquad (1)$$

Si O est une origine fixe quelconque, on peut associer à chaque instant au mobile M, le vecteur position $\overrightarrow{OM}(t)$ fonction vectorielle de point. Ainsi à l'instant t le mobile est en A et nous avons $\overrightarrow{OM}(t) = \overrightarrow{OA}$ et à l'instant t' = t + Δt le mobile est en A' et nous avons $\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) = \overrightarrow{OA'}$. D'après (1) la définition de la vitesse instantanée se ramène donc à celle de la dérivée par rapport au temps de la fonction vectorielle $\overrightarrow{OM}(t)$.

$$\vec{v}(M) = \lim \frac{\overrightarrow{OM}(t + \Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t} \qquad \text{lorsque } \Delta t \to 0$$

$$= \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta M}}{\Delta t}$$

et on note cette vitesse instantanée en utilisant l'écriture différentielle $\vec{v}(M) = \dfrac{d\vec{M}}{dt}$

la vitesse instantanée étant relative au référentiel (R) on adoptera la notation suivante pour la suite.

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{/R}$$

<u>Remarques</u> :

* La vitesse instantanée $\vec{v}(M)$ est tangente à la trajectoire (C) et orientée dans le sens du mouvement (figure IV.2). Si $\vec{\tau}$ est le vecteur unitaire porté par la tangente à la courbe au point M et orienté dans le sens du mouvement du mobile, nous pouvons écrire :

$$\vec{v}(M) = |\,\vec{v}(M)\,|\ \vec{\tau}$$

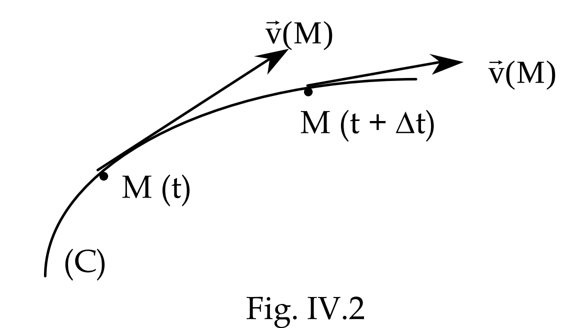


Fig. IV.2

* La vitesse s'exprime en unité de longueur par unité de temps [L][T^{-1}].

c. Hodographe du mouvement

Soit une trajectoire (C) parcourue par un mobile M. En chaque point A_i de la trajectoire (figure IV.3) (c'est-à-dire à chaque instant t_i) le point M a une vitesse $\vec{v}_{t_i}(M) = \vec{v}_i$.

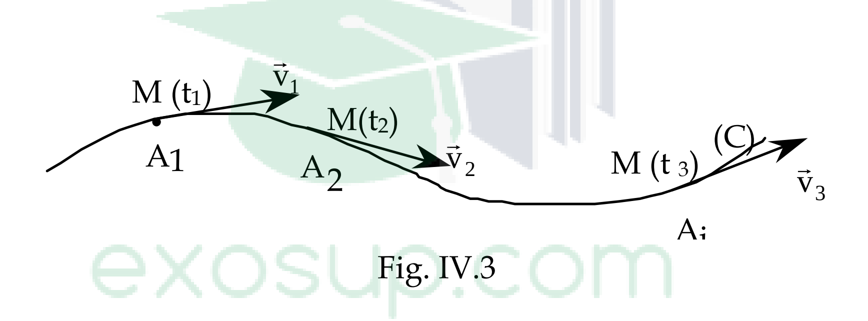


Fig. IV.3

Soit un point fixe O pris comme origine des vecteurs équipollents aux vecteurs $\vec{v}_i$; c'est-à-dire à partir du point O on trace les vecteurs $\overrightarrow{OB_i} = \vec{v}_i$ (i = 1,2,…). La courbe (C') définie par les extremités B_i est appelée hodographe du mouvement (figure IV.4).

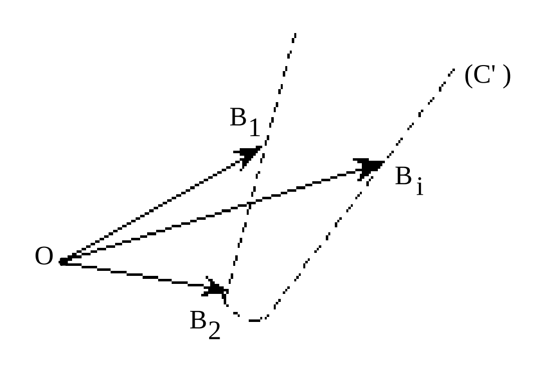


Fig. IV.4

3- Accélération d'un point matériel

L'accélération par rapport à un référentiel (R) associée à un mobile M traduit la variation au cours du temps du vecteur vitesse . En d'autres termes le vecteur vitesse est pour l'accélération ce que le vecteur position est pour le vecteur vitesse.

On définit donc le vecteur accélération instantanée $\vec{\gamma}(M)$ du mobile M par rapport à un référentiel (R) par la dérivée par rapport au temps du vecteur vitesse $\vec{v}(M)$:

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t} \qquad (1)$$

$$= \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{/R}$$

or nous avons :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{/R}$$

d'où

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)\right)_{/R}$$

et en utilisant la notation :

$$\left(\frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)\right)_{/R} = \left(\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}\right)_{/R}$$

Nous déduisons que l'accélération instantanée du mobile M peut s'écrire :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \left(\frac{d^2\vec{M}}{dt^2}\right)_{/R}$$

Remarque :

* On montre à partir de l'expression (1) que l'accélération est toujours orientée vers la concavité de la trajectoire (figure IV.5).

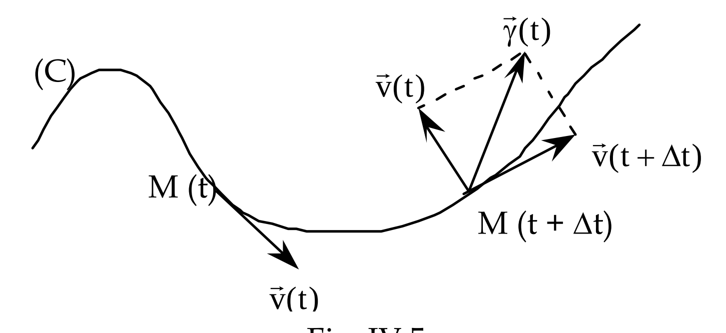
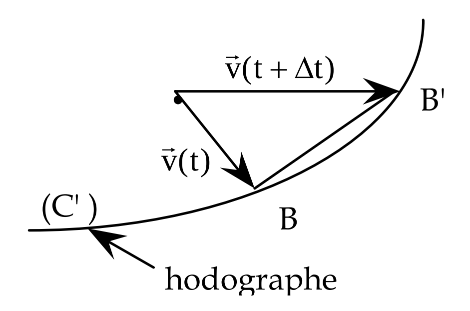


Fig. IV.5

* Par ailleurs soit l'accélération $\vec{\gamma}(M)_{/R} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}$

et soit O un point fixe à partir duquel on porte les vecteurs $\overrightarrow{OB} = \vec{v}(t)$ et $\overrightarrow{OB'} = \vec{v}(t+\Delta t)$, B et B' sont sur l'hodographe (C') lorsque $\Delta t \varnothing 0$, B' tend vers B et le vecteur $\overrightarrow{BB'} = \vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)$ est alors tangent à l'hodographe (C').



V- <u>Composantes de la vitesse dans différents repères locaux</u>.

Soit un point matériel M de vitesse instantanée) $\vec{v}(M)_{/R} = \left(\dfrac{d\vec{M}}{dt}\right)_{/R}$ détérminée par rapport à un référentiel (R). Il s'agit de déterminer les composantes de cette vitesse dans les différents repères locaux que nous avons définis précédemment. Il faut faire attention de ne pas confondre le système d'axes liés au référentiel par rapport auquel on définit la vitesse $\vec{v}(M)_{/R}$ avec le repère local (ou système d'axes locaux) en tant que repère géométrique dans lequel on peut exprimer les composantes de cette vitesse.

1- Repère local en coordonnées cartésiennes

Soit $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ la base associée au système d'axes locaux en coordonnées cartésiennes et M(x,y,z) un point matériel. A chaque instant nous avons :

$$\vec{OM}(t) = x(t)\ \vec{e}_x + y(t)\ \vec{e}_y + z(t)\ \vec{e}_Z$$

O étant fixe par rapport à (R), on a par dérivation relativement au temps dans le référentiel (R) :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{OM}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{/R} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

Les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_Z$ ne dépendent pas du temps.

2- Repère local en coordonnées cylindriques

Soit $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ base locale en M(r,φ,z), point caractérisé par ses coordonnées cylindriques (figure V.1). Nous avons :

$$\vec{OM}(t) = r(t)\ \vec{e}_r + z(t)\ \vec{e}_z = \vec{Om} + \vec{mM}$$

et par dérivation par rapport au temps dans (R)

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{/R} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r(t)\ \frac{d\vec{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z + z(t)\ \frac{d\vec{e}_z}{dt}$$

or $\vec{e}_z$ est fixe par rapport au temps et $\vec{e}_r$ dépend de φ, c'est- à-dire $\vec{e}_r = \vec{e}_r[\varphi(t)]$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\ \frac{d\varphi}{dt}$$

or $\quad \dfrac{d\vec{e}_r}{d\varphi} = \vec{e}_\varphi$

d'où $\quad \dfrac{d\vec{e}_r}{dt} = \dfrac{d\varphi}{dt}\ \vec{e}_\varphi$

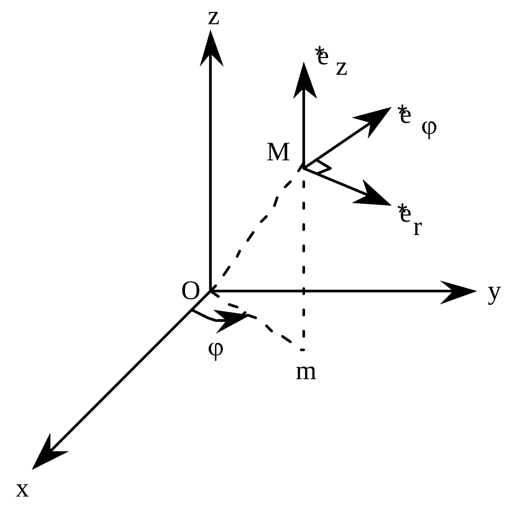


Fig. V.1

par ailleurs $\frac{d\vec{e}_z}{dt} = 0$; nous déduisons donc l'expression de la vitesse :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_R = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r(t)\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

Remarque :
Cette expression de la vitesse peut être déduite également de celle du déplacement élémentaire $d\vec{M}$ en coordonnées cylindriques. En effet nous avons vu au paragraphe III-3-b que :

$$d\vec{M} = dr\ \vec{e}_r + rd\varphi\ \vec{e}_\varphi + dz\ \vec{e}_z$$

d'où $$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_R = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r(t)\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

3- Repère local en coordonnées sphériques

Soit $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ une base locale en coordonnées sphériques (figure V.2). Nous pouvons écrire dans cette base à chaque instant :

$$\vec{OM}(t) = \rho(t)\ \vec{e}_\rho$$

par dérivation par rapport au temps dans le référentiel (R) nous obtenons :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_R = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$$

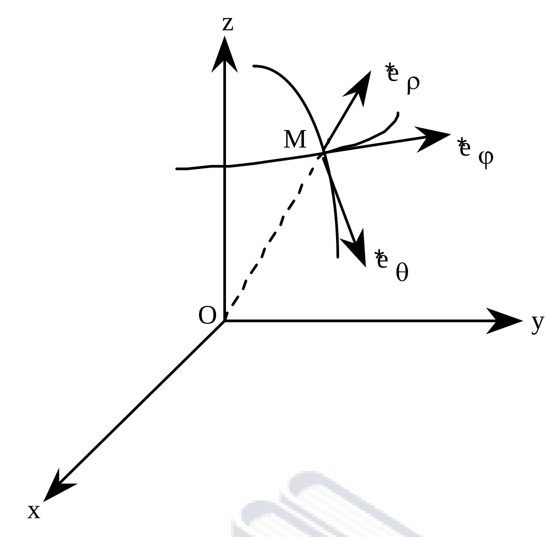


Fig. V.2

or nous avons vu au paragraphe III.3.c que $\vec{e}_\rho$ est fonction de θ et φ, c'est-à-dire que :

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho[\theta(t),\varphi(t)]$$

d'où

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

et en utilisant les relations de passage du paragraphe III-3-d nous pouvons déduire que :

$$\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta$$

et

$$\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = \sin\theta\ \vec{e}_\varphi$$

Lorsque l'on remplace les expressions précédentes dans celle de la vitesse nous obtenons donc en coordonnées sphériques :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{/R} = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \rho\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

Remarque :

Cette expression de la vitesse peut être également déduite de celle du dépalacement élémentaire en coordonnées sphériques (voir III-3-c). En effet

$d\vec{M} = d\rho\ \vec{e}_\rho + \rho\, d\,\theta\ \vec{e}_\theta + \rho \sin\theta\, d\varphi\ \vec{e}_\varphi$

d'où

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{/R} = \frac{d\rho}{dt}\ \vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\ \vec{e}_\theta + \rho \sin\theta \frac{d\varphi}{dt}\ \vec{e}_\varphi$$

4- Dans le repère de SERRET-FRENET :

Soit s(t) l'abscisse curviligne d'un point M(s) sur une courbe trajectoire (C) d'origine O et M' est un point voisin de M (figure V.3) ; nous avons alors $d\vec{M} = \overrightarrow{MM'} = ds\ \vec{\tau}$, c'est-à-dire : $\vec{\tau} = \dfrac{d\vec{M}}{ds}$

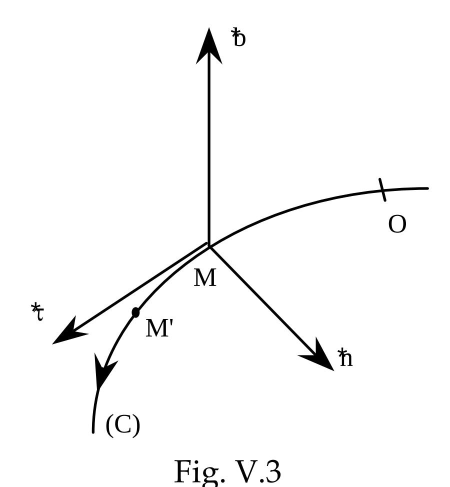


Fig. V.3

la vitesse du point M est

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_R = \frac{d\vec{M}}{ds}\ \frac{ds}{dt}$$

d'où l'expression de la vitesse dans le repère de SERRET-FRENET:

$$\vec{v}(M)_{/R} = \frac{ds}{dt}\,\vec{\tau}$$

VI- Composantes de l'accélération dans differents repères locaux.

La même démarche utilisée pour la vitesse va être reprise pour l'accélération $\vec{\gamma}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{/R}$ d'un point M , déterminée par rapport à un référentiel (R). Il s'agit donc de déterminer les composantes de cette accélération dans les différents repères locaux.

1- Repère local en coordonnées cartésiennes

Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ l'expression de l'accélération $\vec{\gamma}(M)_{/R}$ s'écrit :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{/R} = \frac{d^2x}{dt^2}\,\vec{e}_x + \frac{d^2y}{dt^2}\,\vec{e}_y + \frac{d^2z}{dt^2}\,\vec{e}_z$$

les vecteurs $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ étant fixes dans le temps.

2- Dans le repère local en coordonnées cylindriques

Nous avons vu dans le paragraphe V-2 que :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{/R} = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r(t)\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

d'où

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{/R}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r\right) + \frac{d}{dt}\left(r(t)\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi\right) + \frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\vec{e}_z\right) \qquad (1)$$

en explicitant le 1er terme de l'epression précédente nous avons :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \frac{d\vec{e}_r}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r\right) = \frac{d^2r}{dt^2}\vec{e}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi \qquad (2)$$

de même, en explicitant le 2ème terme de l'expression (1) nous avons :

$$\frac{d}{dt}\left(r(t)\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi\right) = \frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi + r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,\vec{e}_\varphi + r\,\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

or nous avons :

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{d\vec{e}_\varphi}{d\varphi}\,\frac{d\varphi}{dt} = -\,\vec{e}_r\,\frac{d\varphi}{dt}$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\left(r(t)\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi\right) = \left[\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e}_\varphi - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\vec{e}_r \qquad (3)$$

Enfin, le 3ème terme de l'expression (1) donne :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{dz}{dt}\vec{e}_z\right) = \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z \qquad (4)$$

car $\quad \dfrac{d\vec{e}_z}{dt} = 0$

En remplaçant (2), (3), (4) dans (1) nous obtenons l'expression de l'accélération $\vec{\gamma}(M)_{/R}$ dans la base du repère local en coordonnées cylindriques :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{/R}$$
$$= \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e}_\varphi + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{e}_z$$

3- Dans le repère local en coordonnées sphériques

Dans ce repère nous avons vu l'expression de la vitesse :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)/_R = \frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho + \rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \rho\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

et par dérivation

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{/R}$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho\right) + \frac{d}{dt}\left(\rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right) + \frac{d}{dt}\left(\rho\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi\right) \qquad (5)$$

en explicitant le 1er terme nous avons :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho\right) = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\vec{e}_\rho}{dt}$$

$$= \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt}\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{d\rho}{dt}\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

car $\vec{e}_\rho = \vec{e}_\rho(\theta,\varphi)$ et $d\vec{e}_\rho = \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\theta}d\theta + \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi}d\varphi$

or d'après l'expression de $\vec{e}_\rho$ donnée au § III-3-d, nous déduisons :

$$\frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\theta} = \vec{e}_\theta \quad \text{et} \quad \frac{\partial\vec{e}_\rho}{\partial\varphi} = \sin\theta\ \vec{e}_\varphi$$

d'où $\frac{d}{dt}\left(\frac{d\rho}{dt}\vec{e}_\rho\right) = \frac{d^2\rho}{dt^2}\vec{e}_\rho + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}\sin\theta\ \vec{e}_\varphi$

de même en explicitant le 2ème terme de (5) nous avons :

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta\right) = \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \rho\frac{d^2\theta}{dt^2}\vec{e}_\theta + \rho\frac{d\theta}{dt}\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$$

or d'après l'expression de $\vec{e}_\theta$ donnée au § III-3-d, nous déduisons :

$$\frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial\vec{e}_\theta}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

$$= - \frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\rho + \cos\theta \, \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

d'où

$$\frac{d}{dt}\left(\rho \, \frac{d\theta}{dt} \, \vec{e}_\theta\right) = - \rho \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 \vec{e}_\rho + \left[\rho \, \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\vec{e}_\theta + \rho\cos\theta \, \frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\varphi$$

enfin en explicitant le 3ème terme de (5) nous avons :

$$\frac{d}{dt}\left(\rho\sin\theta\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi\right) = \frac{d\rho}{dt}\,\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \rho\cos\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\varphi + \rho\sin\theta\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e}_\varphi + \rho\sin\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\,\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt}$$

or nous avons d'après l'expression de $\vec{e}_\varphi$ donnée au § III-3-d :

$$\frac{d\vec{e}_\varphi}{dt} = \frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

et $$\frac{\partial\vec{e}_\varphi}{\partial\varphi} = - \sin\theta\;\vec{e}_\rho - \cos\theta\;\vec{e}_\theta$$

en remplaçant dans (5) les trois termes par leurs expressions respectives détaillées nous obtenons finalement :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{/R} = \left\{\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 - \rho\sin^2\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}\vec{e}_\rho$$
$$+\left\{\rho\,\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\theta}{dt} - \rho\,\sin\theta\cos\theta\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right\}\vec{e}_\theta$$
$$+\left\{\rho\sin\theta\left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right) + 2\sin\theta\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + 2\rho\cos\theta\,\frac{d\varphi}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right\}\vec{e}_\varphi$$

4. Dans le repère de SERRET FRENET

Nous avons vu précedemment l'expression de la vitesse, dans ce repère:

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{M}}{dt}\right)_{/R} = \frac{ds}{dt}\vec{\tau} = v\ \vec{\tau}$$

par dérivation nous avons :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right)_{/R} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \frac{ds}{dt}\frac{d\vec{\tau}}{dt}$$

or nous avons, en tenant compte des formules de FRENET (voir § 1, 2, 3)

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds}\frac{ds}{dt} = \frac{\vec{n}}{R(s)}\frac{ds}{dt}$$

avec R(s) le rayon de courbure. Et en remplaçant dans l'expression de l'accélération nous obtenons finalement :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{\vec{n}}{R(s)} = \gamma_t\vec{\tau} + \gamma_n\vec{n} \qquad (6)$$

<u>Remarques</u> :

* La composante tangentielle de l'accélération est :

$$\gamma_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$$

elle donne des indications sur la manière dont le point matériel est accéléré sur la trajectoire, tandis que la composante normale de l'accélération (portée par la normale principale)

$$\gamma_n = \frac{v^2}{R(s)} = \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{1}{R(s)}$$

permet de déterminer la courbure de la trajectoire au point considéré , γ_n est d'autant plus grande que le rayon de courbure est petit.

* On remarque d'après l'expression $\vec{\gamma}(M)_{/R} = \gamma_t\vec{\tau} + \gamma_n\vec{n}$ que l'accélération est toujours contenue dans le plan osculateur de la trajectoire au point considéré.

VII- Exemples de mouvements particuliers simples.

1- Mouvement rectiligne

a- Définition

Un point matériel M est animé d'un mouvement rectiligne si sa trajectoire est une droite et si les vecteurs position $\overrightarrow{OM}$ (O point fixe sur cette droite), vitesse $\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$ et accélération $\vec{\gamma}(M) = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$ sont colinéaires et portés par cette droite.

b- Mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement est rectiligne et uniforme s'il répond à la définition (a) et si en plus, le module de la vitesse est constant, c'est-à-dire $|\vec{v}(M)| = cte$; ainsi pour un tel mouvement nous avons $\vec{v}(M) = \overrightarrow{cte}$.

Remarques :

* Si M décrit un mouvement rectiligne uniforme et $\vec{i}$ un vecteur unitaire sur la droite trajectoire, nous avons :

$$\vec{v}(M) = v\,\vec{i}$$

$$\vec{\gamma}(M) = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right) = \frac{dv}{dt}\vec{i} + v\frac{d\vec{i}}{dt}$$

avec $\frac{dv}{dt} = 0$ (mouvement uniforme) et $\frac{d\vec{i}}{dt} = 0$ (mouvement rectiligne). Par conséquent, pour un mouvement rectiligne uniforme nous avons à tout instant :

$$\vec{\gamma}(M) = \vec{0}$$

* Un mouvement sur une trajectoire quelconque (pas nécessairement rectiligne) est uniforme si le module de la vitesse est constant sur cette trajectoire.

$$|\vec{v}(M)| = cte$$

c- Mouvement rectiligne uniformément varié

Un mouvement est rectiligne et uniformément varié s'il répond à la définition (a) et si en plus le module de l'accélération est constant sur la trajectoire, c'est-à-dire $|\vec{\gamma}(M)|$ = cte. Ainsi pour un tel mouvement nous avons $\vec{\gamma}(M) = \overrightarrow{cte}$.

Remarques :

* De manière plus générale un mouvement sur une trajectoire quelconque (pas nécessairement rectiligne) peut être uniformément varié si l'accélération sur cette trajectoire à un module constant $|\vec{\gamma}(M)|$ = cte.

* Un mouvement uniformément varié est dit accéléré si en plus, le carré de la vitesse est une fonction croissante du temps ; dans ce cas le produit scalaire $\vec{v}(M) . \vec{\gamma}(M)$ est positif. En effet, soit un mouvement uniformément accéléré ; posons :

$$\vec{v}^2(M) = \vec{v}(M) \ . \ \vec{v}(M)$$

par définition du mouvement accéléré c'est une fonction croissante et donc $\frac{d}{dt}\vec{v}^2(M) > 0$, d'où :

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}(M) \ . \ \vec{v}(M)) = 2 \ \vec{v}(M) \frac{d}{dt}\vec{v}(M) > 0$$

et nous avons bien $\vec{v}(M) . \ \vec{\gamma}(M) > 0$

De même, le mouvement uniformément varié est dit retardé si $\vec{v}^2(M)$ est une fonction décroissante du temps. Le produit scalaire $\vec{v}(M) . \ \vec{\gamma}(M)$ est alors négatif.

d - Mouvement rectiligne sinusoïdal

Un mouvement est rectiligne sinusoïdal s'il répond à la définition (a) et si en plus, l'abscisse du point mobile M est à chaque instant de la forme :

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$$

Ainsi, si O est un point fixe sur la droite trajectoire et $\vec{i}$ un vecteur unitaire, nous avons les vecteurs position, vitesse et accélération du point M qui sont donnés respectivement par :

$$\overrightarrow{OM} = x(t)\ \vec{i} = [X_m \sin(\omega t+\varphi)]\ \vec{i}$$

$$\vec{v}(M) = \frac{dx}{dt}\ \vec{i} = [X_m\ \omega \cos(\omega t+\varphi)]\ \vec{i}$$

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d^2x}{dt^2}\ \vec{i} = [-\ X_m\ \omega^2 \sin(\omega t+\varphi)]\ \vec{i}$$

$$= -\ \omega^2\ \overrightarrow{OM}$$

X_m est l'amplitude maximale du mouvement, ω la pulsation et φ la phase.

2- Mouvement circulaire

a- Définition

Un point matériel M est animé d'un mouvement circulaire si sa trajectoire est un cercle (figure VII.1).

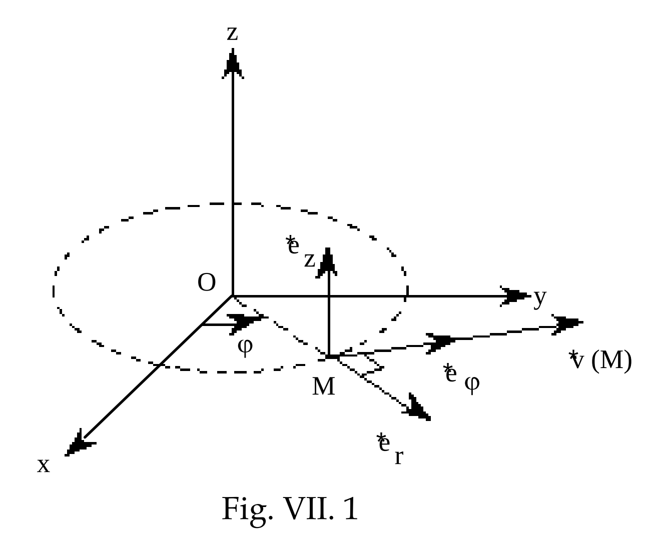


Fig. VII. 1

Si R est le rayon du cercle trajectoire le point M peut être défini par ses équations paramétriques soit en coordonnées cylindriques :

$r = R$

$\varphi = \varphi(t)$ avec $\varphi = (\vec{Ox}, \vec{OM})$

$z = cte$ (= 0 dans le cas de la figure)

soit en coordonnées cartésiennes

$x(t) = R \cos \varphi$

$y(t) = R \sin \varphi$

$z(t) = cte$ (= 0 dans le cas de la figure).

b- Vecteur vitesse de rotation

Nous nous plaçons en coordonnées cylindriques (ou polaires); l'expression de la vitesse est alors d'après (V-2) :

$$\vec{v}(M) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\,\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z \qquad (1)$$

or dans notre cas nous avons $r = R = cte$ et $z = cte$; et en remplaçant dans (1)

$$\vec{v}(M) = R\,\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi \qquad (2)$$

$$= v\ \vec{e}_\varphi$$

Puisque le mouvement est circulaire $\vec{e}_\varphi$ est tangent au cercle trajectoire ; par ailleurs le trièdre $(\vec{e}_r, \vec{e}_\varphi, \vec{e}_z)$ étant orthonormé et direct nous pouvons écrire l'expression (2) sous la forme :

$$\vec{v}(M) = R\,\frac{d\varphi}{dt}(\vec{e}_z \Lambda \vec{e}_r)$$

$$= \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_z\ \Lambda\ R\ \vec{e}_r$$

Le pseudo vecteur $\vec{\omega} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_z$ est appelé "vecteur vitesse de rotation", $\frac{d\varphi}{dt}$ étant la valeur algébrique de vitesse angulaire, posons $\overrightarrow{OM} = R\ \vec{e}_r$ et nous avons alors l'expression de la vitesse pour un mouvement circulaire sous la forme :

$$\vec{v}(M) = \vec{\omega}\ \Lambda\ \overrightarrow{OM} \qquad (3)$$

Remarque :

Dans le cas particulier où le mouvement circulaire est uniforme nous avons :

$$|\ \vec{v}(M)\ | = |\,v\,| = |\,R\frac{d\varphi}{dt}\ | = cte$$

d'où $\qquad |\frac{d\varphi}{dt}\ | = cte$

c- Vecteur accélération

En dérivant l'expression (3) nous pouvons déduire l'expression de l'accélération :

$$\vec{\gamma}(M) = \left(\frac{d\vec{v}(M)}{dt}\right) = \frac{d}{dt}(\vec{\omega}\ \Lambda\ \overrightarrow{OM})$$

$$= \frac{d\vec{\omega}}{dt}\ \Lambda\ \overrightarrow{OM} + \vec{\omega}\ \Lambda\ \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

explicitons chacun des termes ; ainsi pour le premier :

$$\frac{d\vec{\omega}}{dt}\ \Lambda\ \overrightarrow{OM} = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_z\right)\Lambda\ R\ \vec{e}_r$$

$$= \left(\frac{d^2\varphi}{dt^2}\ \vec{e}_z + \frac{d\varphi}{dt}\ \frac{d\vec{e}_z}{dt}\right)\Lambda\ R\ \vec{e}_r$$

$$= R\frac{d^2\varphi}{dt^2}\,(\vec{e}_z\ \Lambda\ \vec{e}_r)$$

$$= R\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e}_\varphi$$

avec $\frac{d^2\varphi}{dt^2}$ étant la valeur algébrique de l'accélération angulaire .

Pour le second terme

$$\vec{\omega}\wedge\frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_z\wedge\frac{d}{dt}(R\vec{e}_r)$$

$$= \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_z\wedge R\,\frac{d\vec{e}_r}{dt}$$

$$= \frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_z\wedge R\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}_\varphi$$

$$= R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2(\vec{e}_z\wedge\vec{e}_\varphi)$$

$$= -R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\vec{e}_r$$

d'où l'expression de l'accélération en coordonnées cylindriques pour un mouvement circulaire :

$$\vec{\gamma}(M) = \gamma_r\,\vec{e}_r + \gamma_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

Ainsi cette accélération s'écrit sous la forme d'une somme de deux composantes :

$\vec{\gamma}_r = -R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\vec{e}_r$ est la composante radiale (qui est de même direction que la composante normale car la trajectoire est circulaire).

$\vec{\gamma}_\varphi = R\,\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{e}_\varphi$ est la composante orthoradiale (qui est de même direction que la composante tangentielle puisque $\vec{e}_\varphi$ est tangent au cercle trajectoire).

<u>**Remarques**</u> :

* Si le mouvement circulaire est uniforme nous avons vu que $\left|\frac{d\varphi}{dt}\right|$ = cte et par conséquent l'accélération angulaire $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = 0$, l'accéleration $\vec{\gamma}(M)$ se limite alors à sa seule composante radiale (ou normale) puisque sa composante orthoradiale $\gamma_\varphi = 0$.

* La description du mouvement circulaire peut se faire également dans le repère de SERRET-FRENET. Nous avons vu (VI.6) que l'expression de l'accélération dans ce repère s'écrit :

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d^2s}{dt^2}\vec{\tau} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \frac{\vec{n}}{R(s)}$$
$$= \gamma_t\ \vec{\tau} + \gamma_n\ \vec{n}$$

avec la composante tangentielle $\gamma_t = \frac{dv}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}$ et la composante normale $\gamma_n = \frac{v^2}{R(s)} = \frac{1}{R(s)}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$.

Pour un mouvement circulaire, le rayon de courbure est tout simplement le rayon R du cercle trajectoire . Par ailleurs, ds étant un élément du cercle, nous avons :

$$ds = R\ d\varphi$$

$$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\varphi}{dt}$$

$$\frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d^2\varphi}{dt^2}$$

en remplaçant dans l'expression de l'accélération nous obtenons :

$$\vec{\gamma}(M) = R\ \frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{\tau} + R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \vec{n}$$

$$= \frac{dv}{dt}\ \vec{\tau} + \frac{v^2}{R}\ \vec{n} = \gamma_t\ \vec{\tau} + \gamma_n\ \vec{n}$$

avec $\gamma_t = R\,\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$ et $\gamma_n = R\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right)^2$

3- Mouvement hélicoïdal

a- Définition

Un point matériel M décrit un mouvement hélicoïdal si sa trajectoire est une hélice circulaire (figure VII.2).

La projection m du point M dans le plan Oxy décrit alors un cercle.

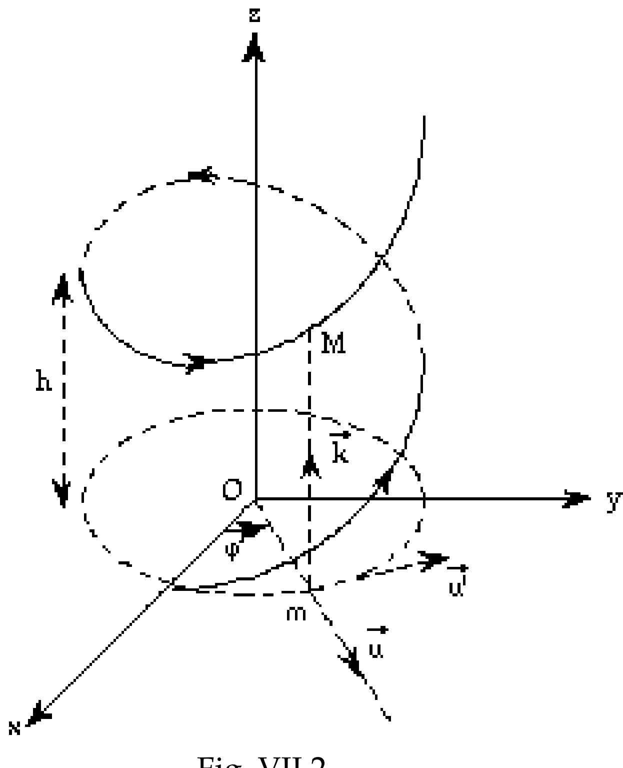


Fig. VII.2

b- Equations paramétriques.

On se propose d'étudier le mouvement hélicoïdal en coordonnées cylindriques r, φ, z . Les équations paramétriques du mouvement de M sont alors :

$r = R$

$\varphi = \varphi(t)$

$z = z(t)$

telles que: $a\, z(t) = b\, \varphi(t) + c$

a, b, c étant des constantes non nulles simultanément. Le mouvement hélicoïdal est dit non dégénéré lorsque $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Le rapport $\frac{b}{a}$ est le pas réduit de l'hélice . On pose $\frac{b}{a} = \frac{h}{2\pi}$, h étant le pas de l'hélice, c'est-à-dire la variation de z lorsque M fait un tour.

Si $a = 0$ et $b \neq 0$ alors $\varphi(t)$ = constante , le mouvement de M est alors un mouvement rectiligne.

Si $a \neq 0$ et $b = 0$ alors $z(t)$ = constante le mouvement de M est un mouvement circulaire. Dans les deux derniers cas on parle alors de mouvement hélicoïdal "dégénéré".

c- Expression du vecteur vitesse :

Soit $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{k})$ les vecteurs unitaires de base en coordonnées cylindriques, c'est-à-dire que l'on pose $\vec{u} = \vec{e}_r$, $\vec{u}' = \vec{e}_\varphi$ et $\vec{k} = \vec{e}_z$. A chaque instant nous pouvons écrire :

$$\vec{OM} = r\ \vec{u} + z\ \vec{k}$$

avec $r = |\ \vec{Om}\ | = R$

$z = \overline{mM}$

La vitesse $\vec{v}(M)$ par rapport à un référentiel quelconque s'exprime dans la base $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{k})$ par :

$$\vec{v}(M) = \frac{dr}{dt}\vec{u} + r\ \frac{d\varphi}{dt}\vec{u}' + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

Si le mouvement est uniforme et si nous supposons qu'à l'instant $t = 0$ $\varphi = (O\vec{x}, O\vec{u}) = 0$ alors $\varphi = \omega t$ et $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$. Le vecteur vitesse s'écrit alors :

$$\vec{v}(M) = R\ \omega\ \vec{u}' + \frac{dz}{dt}\vec{k}$$

compte tenu de la relation $z(t) = \frac{h}{2\pi}\ \varphi(t) + \frac{c}{a}$, nous avons

$$\vec{v}(M) = R\,\omega\ \vec{u}' + \frac{h}{2\pi}\frac{d\varphi}{dt}\ \vec{k}$$
$$= R\,\omega\ \vec{u}' + \frac{h\omega}{2\pi}\vec{k} \qquad (1)$$

le module de la vitesse est :

$$|\ \vec{v}(M)\ | = \omega\ \sqrt{R^2 + \frac{h^2}{(2\pi)^2}}$$

par ailleurs nous pouvons déterminer l'angle ψ (voir figure VII.3) que fait le vecteur vitesse avec la direction $\vec{Oz}$ en écrivant le produit scalaire :

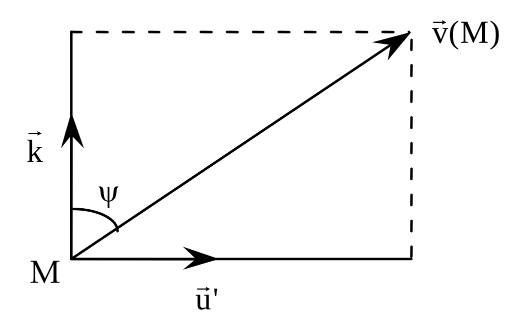


Fig. VII.3

$$\vec{v}(M)\,.\ \vec{k} = |\ \vec{v}(M)\ |\ \ |\ \vec{k}\ |\ \cos\psi \qquad \text{avec}\ \ \psi = (\vec{v}(M), \vec{k})$$

et d'après (1)

$$\vec{v}(M)\,.\ \vec{k} = \frac{h\omega}{2\pi}$$

d'où

$$\cos\psi = \frac{h/2\pi}{\sqrt{R^2 + \left(\frac{h}{2\pi}\right)^2}}$$

l'angle ψ est donc constant.

d- Expression de l'accélération

L'accélération $\vec{\gamma}(M)$ par rapport à un référentiel quelconque s'exprime dans la base $(\vec{u}, \vec{u}', \vec{k})$ en coordonnées cylindriques par l'expression :

$$\vec{\gamma}(M) = [\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2]\vec{u} + [2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}]\vec{u}' + \frac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$$

or dans le cas du mouvement hélicoïdal :

$$r = R \quad \text{et} \quad z(t) = \frac{h}{2\pi}\varphi(t) + \frac{c}{a}$$

d'où

$$\vec{\gamma}(M) = -R\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\vec{u} + R\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{u}' + \frac{h}{2\pi}\frac{d^2\varphi}{dt^2}\vec{k}$$

Si le mouvement est uniforme avec $\frac{d\varphi}{dt} = \omega$, l'accélération s'écrit alors :

$$\vec{\gamma}(M) = -R\,\omega^2\,\vec{u}$$

C'est-à-dire que seule la composante radiale de l'accélération n'est pas nulle ; $\vec{\gamma}(M)$ dans le cas du mouvement uniforme passe par l'axe du cylindre (axe Oz), et elle est parallèle au plan (Ox,Oy).

VIII- Mouvement à accélération centrale.

1- définition :

Le mouvement d'un point matériel M est à accélération centrale, s'il existe un point fixe O, appelé centre du mouvement, tel que le vecteur $\vec{OM}$ et le vecteur accélération $\vec{\gamma}(M)$ soient constamment colinéaires (voir figure VIII.1). Ceci se traduit par la relation :

$$\vec{OM} \wedge \vec{\gamma}(M) = \vec{0}$$

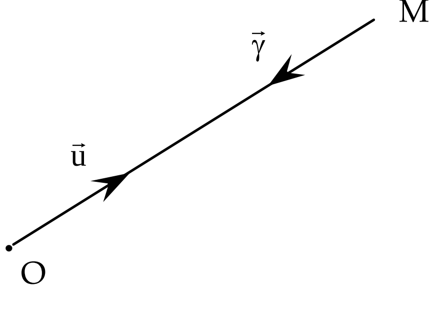


Fig. VIII.1

A partir de la relation fondamentale de la dynamique

$$\vec{F} = m\ \vec{\gamma}$$

nous remarquons que ce type de mouvement se rencontrera chaque fois qu'un point matériel sera en mouvement sous l'effet d'une force passant par un point fixe (force centrale).

Exemple :

La Terre tourne autour du Soleil sous l'action d'une force attrative dont la direction passe toujours par le centre du Soleil. Son accélération passe par leur centre de masse qui peut être considéré comme fixe. Ceci reste vrai chaque fois que nous avons deux corps soumis à leur seule interaction ; nous verrons alors que, dans un pareil cas, le mouvement des deux corps M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 peut être réduit au problème à un seul corps M de $\mu = \dfrac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}$ soumis à la force d'interaction de ces deux corps, exercée en C, centre de masse.

2- Propriétés du mouvement à accélération centrale.

a- Constante du mouvement

Considérons $\vec{C}$ le moment en O de $\vec{v}(M)$, vecteur vitesse du point M :

$$\vec{C} = \overrightarrow{OM}\ \Lambda\ \vec{v}(M)$$

ce vecteur est une constante du mouvement ; en effet :

$$\frac{d\vec{C}}{dt} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt}\ \Lambda\ \vec{v}(M) + \overrightarrow{OM}\ \Lambda\ \vec{\gamma}(M)$$

Chacun des termes étant nul, $\frac{d\vec{C}}{dt} = 0$

Donc pour que le mouvement d'un point M soit à accélération centrale de centre O, il faut et il suffit que le moment en O du vecteur lié $\vec{v}(M)$ soit constant :

$$\vec{OM} \wedge \vec{v}(M) = \vec{C}$$

Remarques :

* Le moment cinétique du mobile M en O est :

$$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)$$

$$= m\,\vec{C}$$

d'où $\vec{C} = \frac{\vec{L}_0}{m}$

Par conséquent le moment cinétique par rapport à O est constant au cours d'un mouvement à accélération centrale.

Le vecteur constant $\vec{C}$ est déterminé par les conditions initiales.

$$\vec{C} = \vec{OM_0} \wedge \vec{v}_0$$

où $\vec{OM_0}$ et $\vec{v}_0$ sont respectivement la position et la vitesse initiales du point M.

b- Caractère plan du mouvement :

La relation $\vec{OM} \wedge m\vec{v}(M) = \vec{C}$ implique que $\vec{OM}$ et $\vec{v}(M)$ sont perpendiculaires à $\vec{C}$. Ainsi, à tout instant $\vec{OM}$ et $\vec{v}(M)$ appartiennent au plan (P) perpendiculaire à $\vec{C}$: la trajectoire de M est donc plane (voir figure VIII.2).

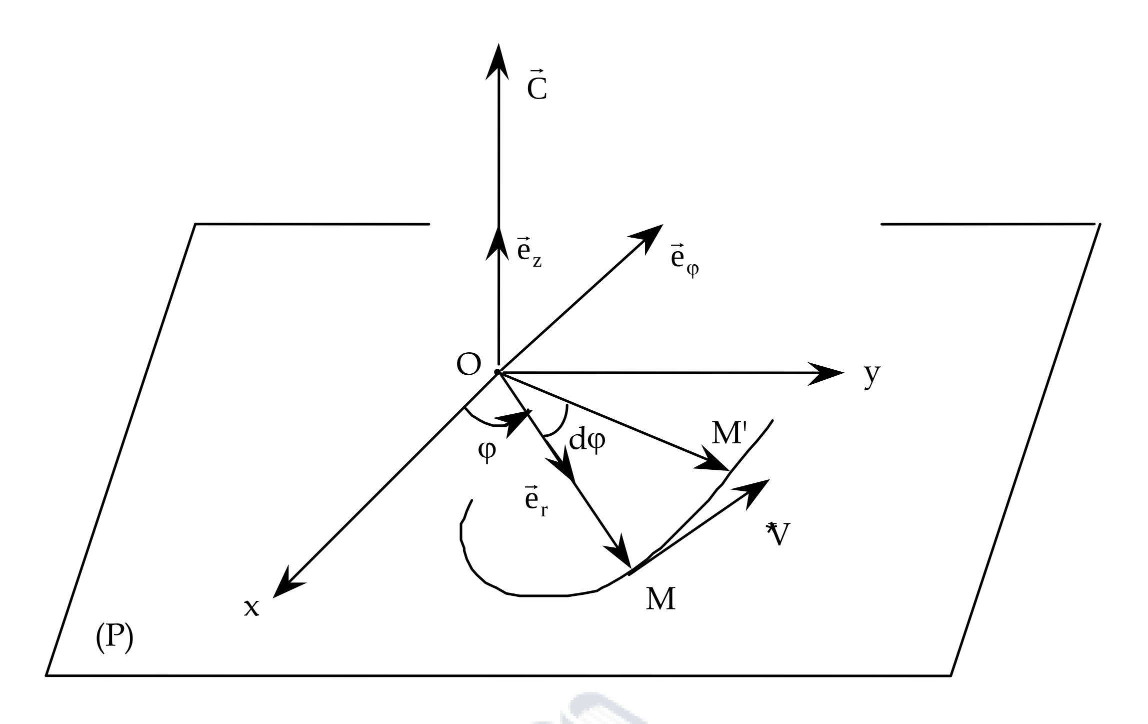


Fig. VIII.2

Remarque :

* Si le moment de $\vec{v}(M)$ en O est nul, $\vec{C} = \vec{0}$, alors la trajectoire de M est portée par une droite passant par O. En effet si $\vec{C} = 0$ alors :

$$\vec{OM} \wedge m\vec{v}(M) = \vec{0}$$

donc la vitesse est centrale et de centre O. En posant $\vec{OM} = r\ \vec{e}_r$, le vecteur $\vec{e}_r$ étant unitaire, nous avons :

$$\vec{e}_r \wedge \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \vec{0} \qquad (1)$$

par ailleurs

$$(\vec{e}_r)^2 = (\vec{e}_r . \vec{e}_r) = 1$$

donc $$\vec{e}_r . \frac{d\vec{e}_r}{dt} = 0 \qquad (2)$$

De ces deux équations (1) et (2) nous déduisons que $\frac{d\vec{e}_r}{dt} = 0$ et donc que $\vec{e}_r$ est constant ; ainsi la trajectoire est portée par une droite passant par O.

c- Loi des aires :

Enoncé :

Dans un mouvement à accélération centrale le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ balaye des aires égales pendant des intervalles de temps égaux.

Pour simplifier l'étude du mouvement nous allons considérer que la trajectoire est dans le plan xOy. Exprimons le vecteur $\vec{C}$ en utilisant le repère local $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\varphi$, $\vec{e}_z$ en coordonnées cylindriques. Nous avons vu (§ V.2) que le vecteur position et le vecteur vitesse peuvent s'écrire :

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e}_r$$

$$\vec{v}(M) = \frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\,\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi$$

En portant dans :

$$\vec{C} = \overrightarrow{OM}\ \Lambda\ \vec{v}(M)$$

on obtient :

$$\vec{C} = r^2\,\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_z = C\,\vec{e}_z$$

avec $$C = r^2\frac{d\varphi}{dt} \qquad (3)$$

C désigne le module constant du vecteur $\vec{C}$. A partir de l'arc $\widehat{MM'} = r\,d\varphi$, on déduit l'aire élémentaire balayée par le rayon vecteur pendant l'intervalle de temps dt :

$$d\mathbf{S} = \frac{r^2}{2}\,d\varphi \qquad (4)$$

des relations (3) et (4), on déduit :

$$d\mathbf{S} = \frac{1}{2}\,C\,dt$$

Il en découle que le rayon vecteur $\vec{OM}$ balaie des aires égales pendant des intervalles de temps égaux; cette propriété porte le nom de loi des aires. La constante C, est appelée constante de la loi des aires et s'écrit :

$$C = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = 2 \frac{dS}{dt}$$

Remarque :

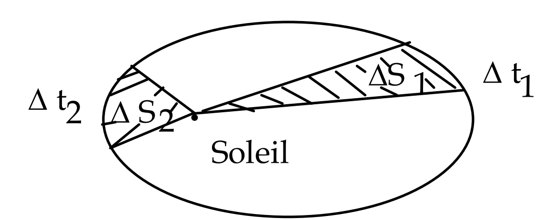
* On appelle vitesse aréolaire à l'instant t, la dérivée par rapport au temps de l'aire balayée par $\vec{OM}$:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{C}{2}$$

Cette vitesse est constante pour un mouvement à accélération centrale. L'aire balayée s'obtient par intégration ; en supposant que pour t = 0, S = 0, on obtient :

$$\mathbf{S} = \frac{C}{2} t$$

Ce résultat a été trouvé lors de l'établissement des lois du mouvement des planètes auteur du soleil, il est connu sous le nom de 2ème loi de Kepler. On montre que les planètes décrivent autour du soleil un mouvement à accélération centrale de trajectoire elliptique dont le soleil est l'un des foyers.



Si les intervalles Δt_1 et Δt_2 sont égaux, alors les surfaces balayées ΔS_1 et ΔS_2 sont aussi égales d'après la 2ème loi de Kepler. La planète se déplace plus rapidement quand elle se rapproche du soleil.

d- Sens du mouvement :

D'après la loi des aires, nous avons :

$$C = r^2 \frac{d\varphi}{dt}$$

Nous remarquons que r ne s'annule jamais au cours du mouvement et que $\frac{d\varphi}{dt}$ est de même signe que C . Si C > 0, alors dφ > 0 et par conséquent φ est strictement croissante. Alors que pour C < 0, $\frac{d\varphi}{dt} < 0$ et φ est strictement décroissante. Ceci signifie que le rayon vecteur $\overrightarrow{OM}$ tourne toujours dans le même sens pour le mouvement à accélération centrale. L'équation de la trajectoire est donnée par une équation de la forme r = f(φ).

3- Formules de Binet :

Les deux formules de Binet s'obtiennent en éliminant le temps respectivement dans les expressions de v^2 et de γ , en tenant compte de la relation $C = r^2 \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_z$

a- Première formule de Binet

Exprimons la vitesse en coordonnées cylindriques (V-1).

$$\vec{v}(M) = \frac{dr}{dt} \vec{e}_r + r \frac{d\varphi}{dt} \vec{e}_\varphi$$

d'où $$v^2(M) = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2$$

or $$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}$$

et $$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

En remplaçant dans $v^2(M)$ nous obtenons la première formule de Binet :

$$v^2(M) = \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{C^2}{r^4} + r^2 \left(\frac{C}{r^2}\right)^2$$

soit $v^2(M) = C^2\left(\frac{1}{r^2} + \left(\frac{dr}{d\varphi}\right)^2 \frac{1}{r^4}\right)$

Faisons le changement de variable $u = \frac{1}{r}$; nous avons alors :

$$\frac{du}{d\varphi} = \frac{du}{dr}\frac{dr}{d\varphi} = -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}$$

donc $v^2 = C^2\left(u^2 + \left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2\right)$

qui représente la première formule de Binet avec la variable u.

b- Deuxième formule de Binet

Ecrivons l'accélération en coordonnées polaires (voir § VI-2) :

$$\vec{\gamma}(M) = \frac{d\vec{v}(M)}{dt} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_r + \left[2\frac{dr}{dt}\frac{d\varphi}{dt} + r\frac{d^2\varphi}{dt^2}\right]\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{\gamma}(M) = \gamma_r\,\vec{e}_r + \gamma_\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

Par définition du mouvement à accélération centrale, nous savons que :

$$\vec{\gamma}(M) \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$$

En remplaçant $\vec{\gamma}(M)$ par son expression nous avons :

$$(\gamma_r\,\vec{e}_r + \gamma_\varphi\,\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r = \vec{0}$$
$$(\gamma_\varphi\,\vec{e}_\varphi) \wedge \vec{e}_r = \gamma_\varphi\vec{e}_z = \vec{0}$$

d'où $\gamma_\varphi = 0$

donc $\vec{\gamma}(M) = \gamma_r\,\vec{e}_r$

c'est-à-dire $\vec{\gamma}(M) = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right]\vec{e}_r$

Eliminons le temps dans cette expression :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{dt}\right) \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt}\right)\frac{d\varphi}{dt}$$

or

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2}$$

d'où

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{C}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{dr}{d\varphi}\frac{C}{r^2}\right) = \frac{C^2}{r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right)$$

$$= -\frac{C^2}{r^2}\frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)$$

et en remplaçant dans l'expression de l'accélération nous obtenons la deuxième formule de Binet

$$\vec{\gamma}(M) = -\frac{C^2}{r^2}\left(\frac{1}{r} + \frac{d^2}{d\varphi^2}\left(\frac{1}{r}\right)\right)\vec{e}_r$$

En faisant le changement de variable $u = \frac{1}{r}$; nous obtenons :

$$\frac{d^2r}{dt^2} = -C^2 u^2 \frac{d^2u}{d\varphi^2}$$

et $$r\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 = C^2 u^3$$

donc: $$\vec{\gamma}(M) = -C^2 u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)\vec{e}_r$$

qui représente la deuxième formule de Binet avec la variable u.

4- Exemples de mouvements à accélération centrale

a- Particule dans un champ Newtonien.

Soit une particule de masse m soumise à l'action d'une force centrale en r^{-2} :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

K est positif ou négatif suivant que la force est attractive ou répulsive. Par exemple dans le cas de l'interaction coulombienne la force s'écrit :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

elle est attractive si les charges électriques sont de signes contraires et répulsives si elles sont de même signe.

Dans le cas de la force de gravitation exercée par la masse M sur la masse m la force Newtonienne gravitationnelle s'écrit :

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \text{ avec } G = 6.67\ 10^{-11} \text{ MKSA}$$

Cette force est toujours attactive; on dit que m se trouve dans un champ Newtonien attractif et soit $\mu = GM$.
A partir de la relation fondamentale $F = m\gamma$, on peut écrire :

$$m\vec{\gamma} = -\frac{\mu m}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}$$

remplaçons $\vec{\gamma}$ par son expressison dans la deuxième formule de Binet :

$$-\mu\, m\, u^2 = -m\, C^2\, u^2\left(u + \frac{d^2u}{d\varphi^2}\right)$$

d'où $$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\mu}{C^2}$$

La solution générale de cette équation différentielle est :

$$u = \frac{1}{r} = A\cos(\varphi + \alpha) + \frac{\mu}{C^2}$$

C , A et α sont des constantes à déterminer à l'aide de la position et de la vitesse initiales. On pose

$$p = \frac{C^2}{\mu} \quad \text{et} \quad e = \frac{AC^2}{\mu}$$

d'où $$\frac{1}{r} = \frac{1}{p} = [1 + e \cos(\varphi + \alpha)]$$

et l'équation de la trajectoire est donc :

$$r = \frac{p}{1 + e \cos(\varphi + \alpha)}$$

C'est l'équation, en coordonnées polaires, d'une conique de foyer O, de paramètre focal p et d'excentricité e . La nature de la conique trajectoire est donnée à partir de la valeur de l'excentricité e ; ainsi:

- si $e = 0$, la trajectoire est un cercle de rayon $r = P$
- si $0 < e < 1$, la trajectoire est une ellipse de foyer O
- si $e = 1$, la trajectoire est une parabole
- si $e > 1$, la trajectoire est une hyperbole.

<u>Remarque</u> :

* Une force centrale proportionnelle à $\frac{1}{r^2}$ intervient dans le mouvement des planètes . Nous montrons dans les chapitres de la dynamique que cette loi de Newton en $\frac{1}{r^2}$ peut être déduite des lois expérimentales de Kepler suivantes :

1ère loi : les orbites des planètes sont des ellipses dont le soleil est l'un des foyers.
2ème loi : le rayon vecteur d'une planète balaie en des temps égaux des aires égales.
3ème loi : le rapport des carrés des périodes de révolution sur les cubes des demi-grands axes de l'ellipse sont constants (indépendants de la planète).

b- Particule soumise à une force centrale attractive proportionnelle à la distance :

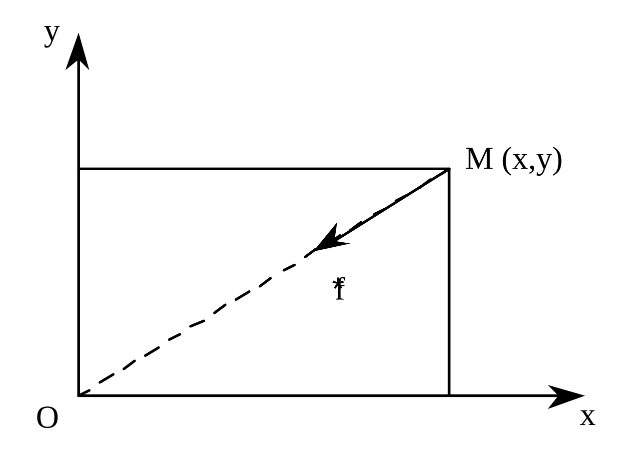
Soit un point matériel M de masse m soumis à une force centrale constamment dirigée de M vers O, et telle que :

$$\vec{F} = -K\,\overrightarrow{OM}$$

La trajectoire de M est dans le plan passant par O et perpendiculaire au vecteur constant $\vec{C}$:

$$\vec{C} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{v}(M)$$

Considérons que la trajectoire est située dans le plan Oxy.



La relation fondamentale de la dynamique :

$$\vec{F} = m\vec{\gamma} = m \frac{d^2 \overrightarrow{OM}}{dt^2} = - K \overrightarrow{OM}$$

projetée sur les axes Ox et Oy, donne les équations :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = - K x$$

$$m \frac{d^2y}{dt^2} = - K y$$

qui s'écrivent aussi :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0$$

avec $\omega^2 = \frac{K}{m}$. L'intégration des équations différentielles conduit à :

$$x = A\cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = B\cos(\omega t + \varphi_2)$$

Les constantes d'intégration A , B , φ_1 et φ_2 sont déterminées à partir des conditions initiales sur la position et la vitesse.
En éliminant le temps entre x et y, on obtient l'équation de la trajectoire :

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB}\cos(\varphi_1 - \varphi_2) = \sin^2(\varphi_1 - \varphi_2)$$

C'est l'équation d'une ellipse inscrite dans un rectangle de côtés 2A et 2B (figure VIII.3).

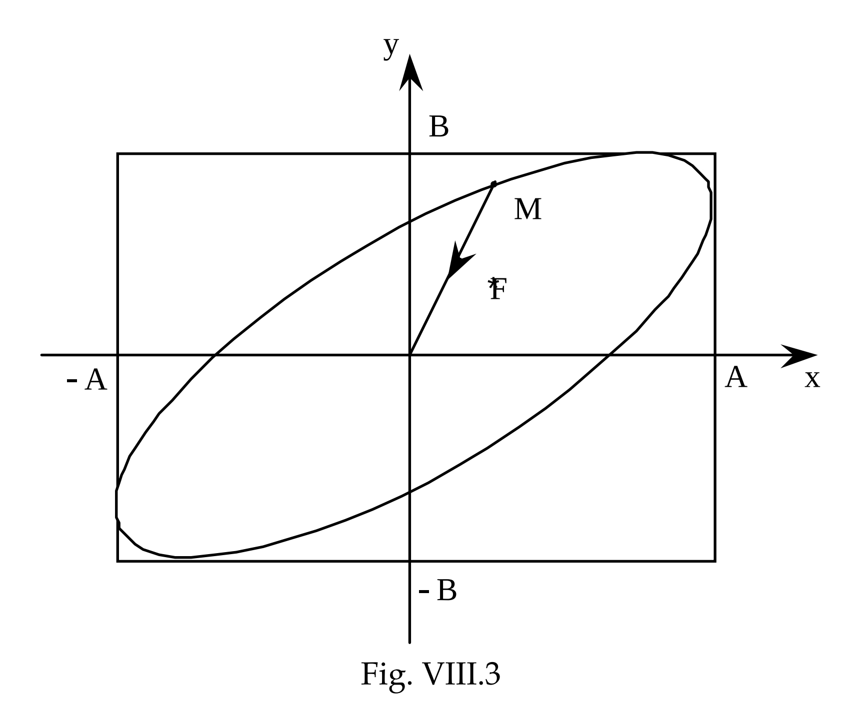


Fig. VIII.3

Comme x et y sont périodiques de période $\frac{2\pi}{\omega}$, alors l'ellipse sera décrite avec la période :

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

Le sens de parcours sur l'ellipse dépend du signe de la constante des aires. En effet :

$$C = 2\frac{dS}{dt} = 2\,\frac{\text{surface de l'éllipse}}{\text{période}}$$

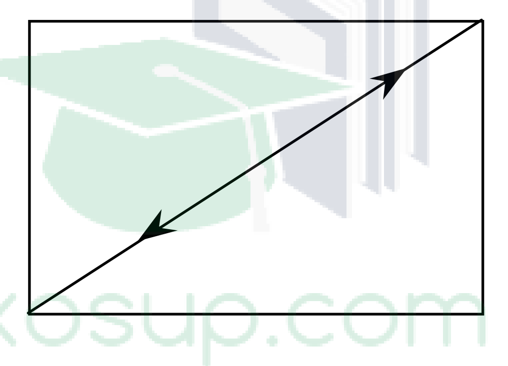
or la surface de l'ellipse est égale à $\pi AB \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$

d'où $$C = \frac{2\pi AB \sin(\varphi_1 - \varphi_2)}{2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}} = AB\,\omega \sin(\varphi_1 - \varphi_2)$$

Donc le sens dans lequel est décrite l'éllipse dépend de $\varphi_1 - \varphi_2$; ainsi :
si $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$ alors $C < 0$. Le mouvement s'effectue donc dans le sens trigonométrique rétrograde : l'ellipse est droite (figure VIII.4,5).
si $\pi < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$ l'éllipse est gauche (figure VIII.6,7).

<u>Cas particuliers</u> :

* Si $\varphi_2 = \varphi_1$, la trajectoire est rectiligne : c'est la première diagonale du rectangle.



* Si $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$, la trajectoire est la deuxième diagonale du rectangle.

* Si $\varphi_2 = \varphi_1 \pm \frac{\pi}{2}$, la trajectoire est circulaire, parcourue dans le sens droit ou gauche.

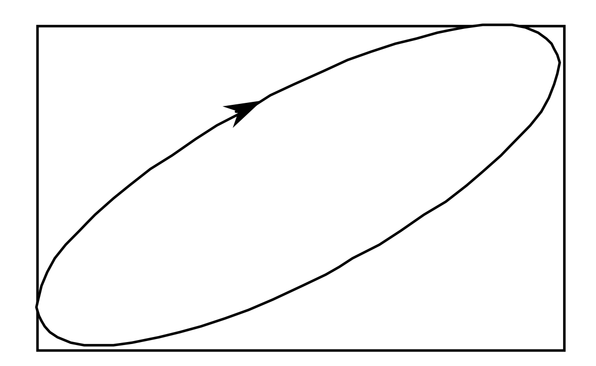


Fig. VIII.4

$$0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \frac{\pi}{2}$$

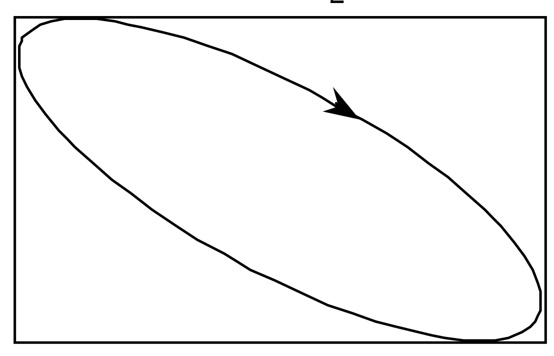


Fig. VIII.5

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$$

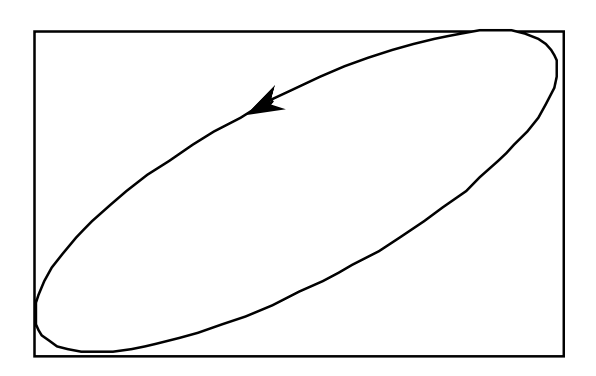


Fig. VIII.6

$$\frac{\pi}{2} < \varphi_2 - \varphi_1 < 3\frac{\pi}{2}$$

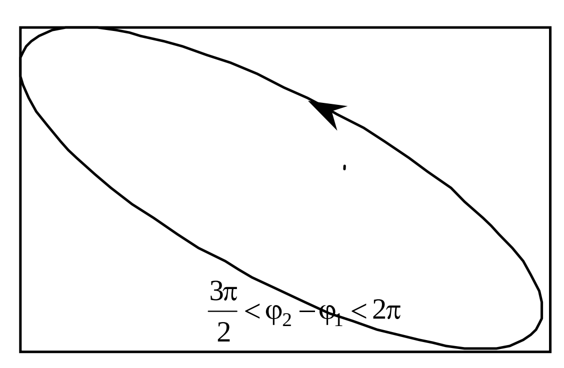


Fig. VIII.7

$$\frac{3\pi}{2} < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$$

IX- Changement de Référentiel.

1- Position du Problème :

Un corps laché dans un train en marche décrit une droite verticale pour un observateur assis dans le train, tandis que, vue par un observateur sur le bord de la voie la trajectoire est une parabole. Le mouvement du même point se manifeste donc de façon différente suivant le référentiel dans lequel on se place pour le décrire.

Le but de ce chapitre est de montrer comment déterminer les caractéristiques cinématiques associées au mouvement d'un point matériel par rapport à un référentiel lorsqu'on connait déjà ce mouvement dans un autre référentiel lui-même en mouvement par rapport au premier.

Considérons deux référentiels (R) et (R') en mouvement relatif l'un par rapport à l'autre (voir figure IV.1). Dans (R) un point M en mouvement est défini par ses paramètres cinématiques position $\overrightarrow{OM}$, vitesse $\vec{v}(M)_{/R}$, accélération $\vec{\gamma}(M)_{/R}$.

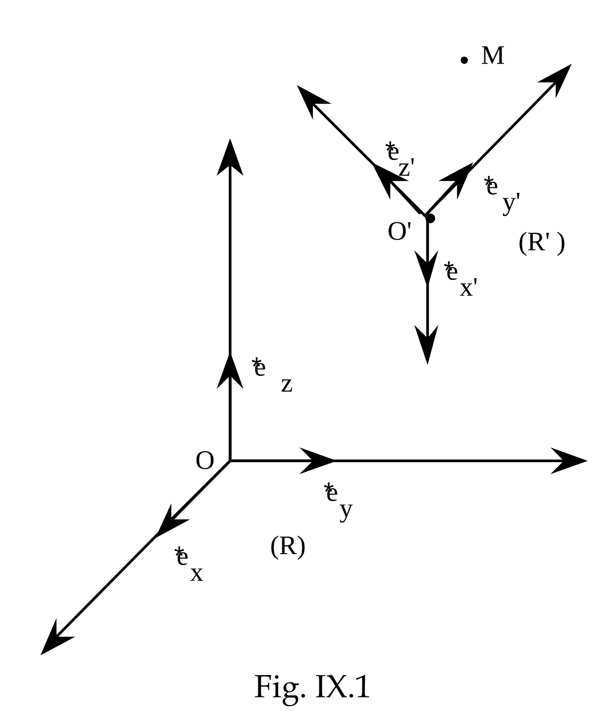


Fig. IX.1

Dans (R'), M est défini par $\overrightarrow{O'M}$, $\vec{v}(M)_{/R'}$, $\vec{\gamma}(M)_{/R'}$.

Le mouvement est décrit de façon différente selon qu'il est considéré dans (R) ou dans (R'). Il s'agit donc dans un changement de référentiel d'exprimer les caractéristiques cinématiques, d'un point matériel M, en mouvement dans (R) en

fonction des caractéristiques cinématiques du même point dans (R') supposées connues.

En général pour décrire le mouvement d'un mobile, nous utilisons deux référentiels: un référentiel "immobile" (R) (qui pourra être supposé dans certains cas comme "absolu" ou galiléen), et un référentiel mobile (R') dans lequel on supposera connus les paramètres cinématiques ; selon le type de mouvement de (R') par rapport à (R), on déduira par la suite (dans des cas simples) les relations analytiques entre ces mêmes paramètres exprimés dans (R) et (R').

2- Divers types de mouvements simples de (R') par rapport à (R).

a- Mouvement de translation

Le référentiel (R'), de vecteurs unitaires $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$ est en translation par rapport au référentiel (R), de vecteurs unitaires $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$, si et seulement si la base $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ est indépendante du temps, c'est-à-dire que ces vecteurs unitaires gardent une orientation constante par rapport à (R) au cours du mouvement de (R') (voir figure IX.2). D'où :

$$\vec{e}'_i = \overrightarrow{cte} \qquad i = 1, 2, 3 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt}\right)_R = 0$$

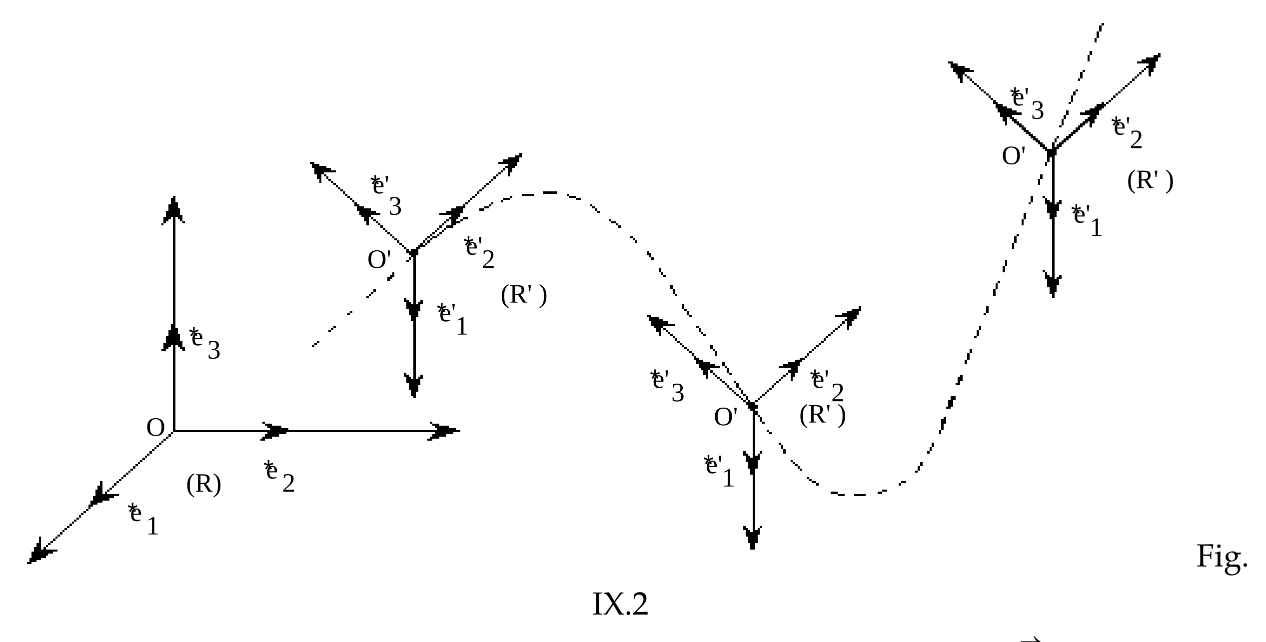


Fig. IX.2

A partir de cette définition nous voyons que tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ lié à (R'), reste équipollent à lui même au cours du mouvement de translation de (R') par rapport à (R). Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est donc constant, d'où :

$$\left(\frac{d\vec{AB}}{dt}\right)_{/R} = 0$$

donc $$\left(\frac{d\,\vec{OB}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\,\vec{OA}}{dt}\right)_{/R}$$

ce qui s'écrit :

$$\vec{v}(B)_{/R} = \vec{v}(A)_{/R}$$

Tous les points liés à (R') ont même vitesse et, donc même accélération par rapport à (R) ; cependant cette même vitesse et cette même accélération peuvent être quelconques.

b- Mouvement de rotation de (R') autour dun axe lié à (R)

Soit les référentiels (R) : $(O;x_1,x_2,x_3)$ et (R') : $(O';x'_1,x'_2,x'_3)$ où les axes $O'\vec{x}_3$ et $O\vec{x}_3$ sont confondus (voir figure IX.3).

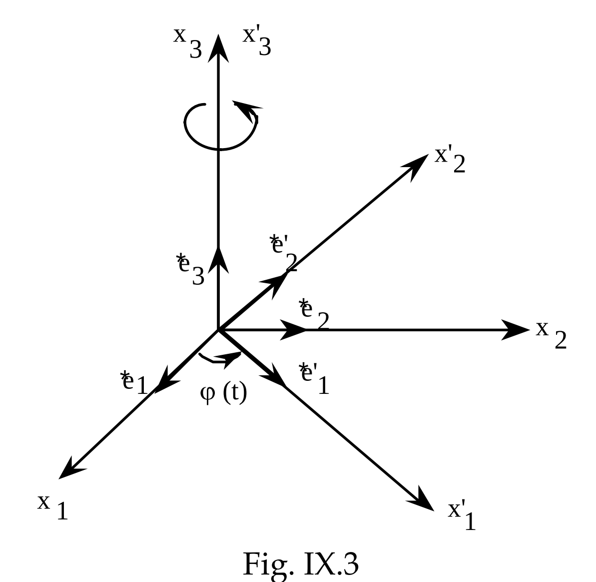


Fig. IX.3

On dit que (R') est en mouvement de rotation par rapport à (R) autour de l'axe avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}_{R'/R}$ si :

$$\vec{\omega}_{R'/R} = \frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}'_3$$

avec $(\vec{e}_1,\vec{e}'_1) = (\vec{e}_2,\vec{e}'_2) = \varphi(t)$

et $(\vec{e}_3, \vec{e}'_3) = 0$

Si $\frac{d\varphi}{dt} > 0$, la rotation a lieu dans le sens direct de $\overrightarrow{Ox_1}$ vers $\overrightarrow{Ox_2}$;

Si $\frac{d\varphi}{dt} < 0$, la rotation a lieu dans le sens inverse de $\overrightarrow{Ox_2}$ vers $\overrightarrow{Ox_1}$.

La rotation de (R) par rapport à (R') est définie par :

$$\vec{\omega}'_{R'/R} = - \vec{\omega}_{R'/R}$$

Les points situés sur l'axe commun $\overrightarrow{Ox_3}$ ont une vitesse nulle par rapport à (R), alors que les autres points, liés à (R'), ont des vitesses non nulles. En effet, à partir des dérivées des vecteurs de base du référentiel (R') nous avons :

$$\left(\frac{d\vec{e}'_1}{dt}\right)_{/R} = \frac{d\vec{e}'_1}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = \vec{e}'_2\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}'_3 \Lambda \vec{e}'_1 = \vec{\omega}_{R'/R} \Lambda \vec{e}'_1$$

$$\left(\frac{d\vec{e}'_2}{dt}\right)_{/R} = \frac{d\vec{e}'_2}{d\varphi}\frac{d\varphi}{dt} = -\,\vec{e}'_1\frac{d\varphi}{dt} = -\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e}'_2 \Lambda \vec{e}'_3 = \vec{\omega}_{R'/R} \Lambda \vec{e}'_2$$

$$\left(\frac{d\vec{e}'_3}{dt}\right)_{/R} = \vec{\omega}_{R'/R} \Lambda \vec{e}'_3 = 0$$

On voit que tout point M, lié à (R'), de vecteur position :

$$\overrightarrow{O'M} = a\ \vec{e}'_1 + b\ \vec{e}'_2 + c\ \vec{e}'_3$$

(a,b,c étant des constantes) est animé d'un mouvement de vitesse :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{/R}$$

$$= a\left(\frac{d\vec{e}'_1}{dt}\right)_{/R} + b\left(\frac{d\vec{e}'_2}{dt}\right)_R + c\left(\frac{d\vec{e}'_3}{dt}\right)_R$$

$$= \vec{\omega}_{R'/R} \Lambda (a\ \vec{e}'_1 + b\ \vec{e}'_2 + c\ \vec{e}'_3)$$

donc $\qquad \vec{v}(M)_{/R} = \vec{\omega}_{R'/R} \Lambda \overrightarrow{O'M}$

c- Angles d'Euler

Pour caractériser la position d'un référentiel (R) (ou d'un solide lié à (R)) en mouvement par rapport à un référentiel (R_0), il faut en général connaitre six paramètres : trois paramètres pour caractériser à un instant t la position d'un point de (R) (ou du solide) et trois paramètres pour caractériser l'orientation de (R) autour de ce point à cet instant. On utilise en général comme paramètres d'orientation les trois angles de Euler que nous allons définir ci-dessous. Ainsi, si O est un point fixe du solide, les angles d'Euler ψ,θ,φ définissent à chaque instant l'orientation des axes (O; $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$) (liés à (R) et au solide) par rapport aux axes ($\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$) (liés à ($R_0$) et ramenés en O). Pour les déteminer, on opère de la façon suivante en partant de (O; $\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0$) (voir figure IX.4) :

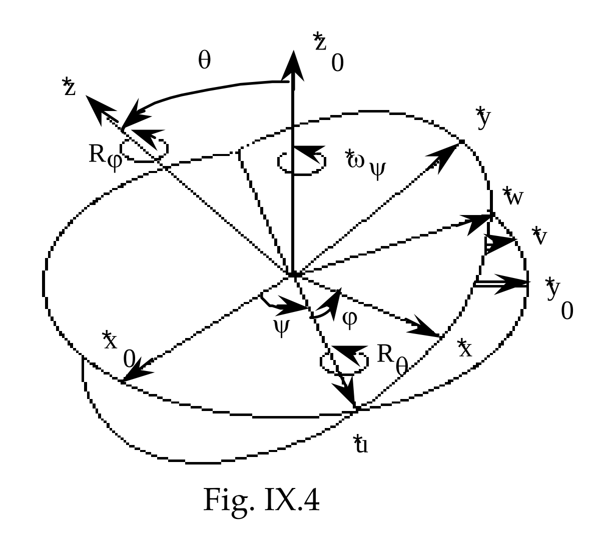
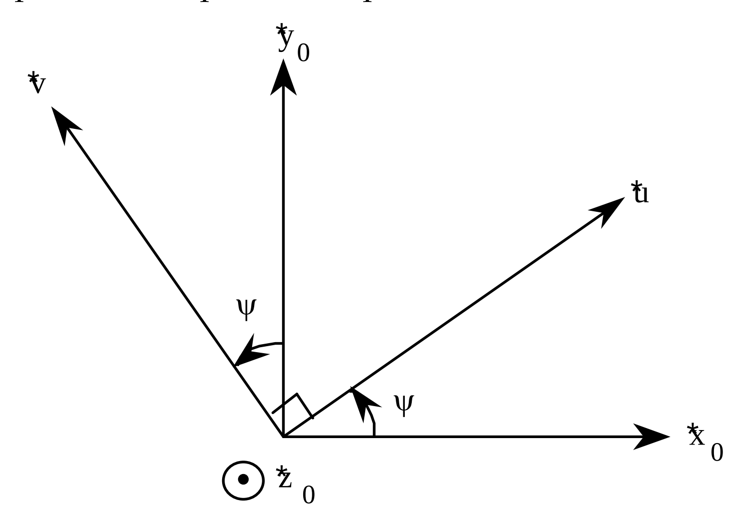


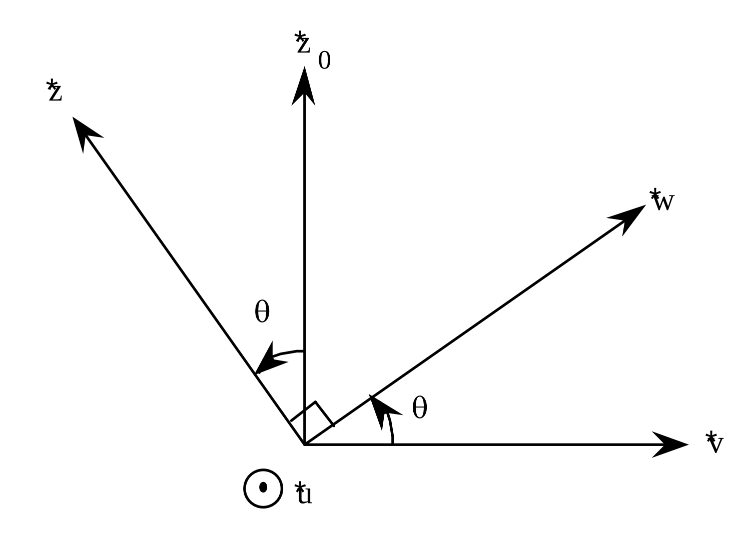
Fig. IX.4

* On fait une première rotation autour de $O\vec{z}_0$ et d'angle $\psi = (O\vec{x}_0, O\vec{u})$ appelé "angle de précession" et tel que $0 \le \psi < 2\pi$. Cette rotation R_ψ d'angles ψ (appelée précession)

permet de passer de (O; $\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0$) à (O;$\vec{u},\vec{v},\ \vec{z}_0$) avec le vecteur vitesse de rotation $\vec{\omega}_\psi = \frac{dy}{dt}\vec{z}_0$, ($\vec{x}_0,\vec{y}_0,\vec{z}_0$) et ($\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0$) étant des bases de vecteurs unitaires associées aux axes de mêmes noms. Une représentation plane de la précession donne :

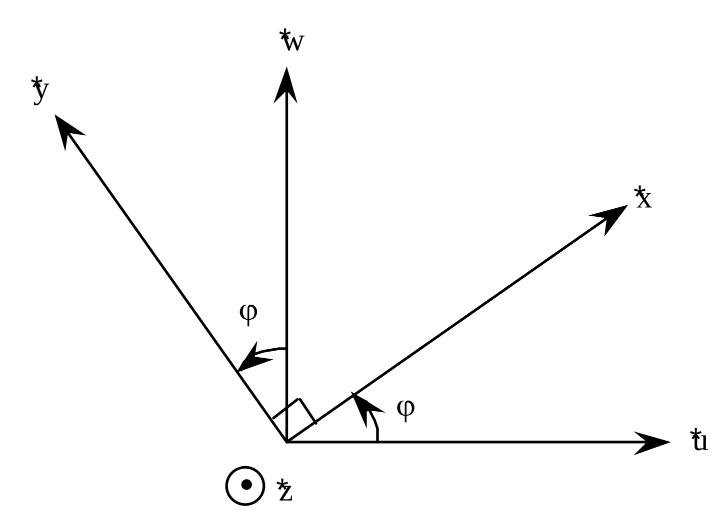


* On effectue ensuite une seconde rotation autour de O$\vec{u}$ et d'angle θ = (O$\vec{u}$,O$\vec{z}$) appelé "angle de nutation" et tel que $0 \le \theta \le \pi$. Cette rotation R_θ (appelée nutation) permet de passer de (O; $\vec{u},\vec{v},\vec{z}_0$) à (O; $\vec{u},\vec{w},\vec{z}$) avec la vitesse angulaire de rotation de vecteur $\vec{\omega}_\theta = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}$. La représentation plane de la nutation est donnée par la figure ci-dessous.



* On effectue enfin une troisième rotation autour de O$\vec{z}$ et d'angle φ = (O$\vec{u}$,O$\vec{x}$) appelé angle de rotation propre et tel que $0 \le \varphi < 2\pi$. Cette rotation R_φ (appelée rotation propre) permet de passer de (O; $\vec{u},\vec{w},\vec{z}$) à (O;$\vec{x},\vec{y},\ \vec{z}$) avec la vitesse angulaire de

rotation de vecteur $\vec{\omega}_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\vec{z}$ et la représentation plane associée à la rotation propre est donée par :



En résumé :

$$(O;\ \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{R_\psi} (O; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0) \xrightarrow{R_\theta} (O;\ \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}) \xrightarrow{R_\varphi} (O; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Les angles ψ,θ et φ sont les trois angles d'Euler; la détermination supplémentaire des composantes de $\overrightarrow{O_0A}$ qui donnent la position d'un point A (du solide) dans R_0 permet d'avoir les six paramètres de position évoqués précédemment.
Par ailleurs, les rotations successives effectuées sont :

$$(A;\ \vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0) \xrightarrow{R_\psi} (A; \vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0) \xrightarrow{R_\theta} (A;\ \vec{u}, \vec{w}, \vec{z}) \xrightarrow{R_\varphi} (A; \vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$$

Le mouvement général de rotation autour d'un point A se décompose donc en trois rotations autour des axes $O\vec{z}_0$, $O\vec{u}$, $O\vec{z}$ qui s'effectuent avec les vitesses angulaires ($\vec{\omega}_\psi = \frac{d\psi}{dt}\vec{z}_0$, $\vec{\omega}_\theta = \frac{d\theta}{dt}\vec{u}$, $\vec{\omega}_\varphi = \frac{d\varphi}{dt}\vec{z}$)
D'après la composition des vitesses angulaires le vecteur rotation du mouvement composé de (R') par rapport à (R) est :

$$\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{\omega}_\psi + \vec{\omega}_\theta + \vec{\omega}_\varphi$$

On obtient facilement les coordonnées de $\vec{\omega}_{R'/R}$ dans la base $(\vec{z}_0, \vec{u}, \vec{z})$:

$$\vec{\omega}_{R'/R} = \frac{d\psi}{dt}\vec{z}_0 + \frac{d\theta}{dt}\vec{u} + \frac{d\varphi}{dt}\vec{z}$$

A partir de ces expressions, on écrit $\vec{\omega}_{R'/R}$ dans la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{z}_0)$:

$$\vec{\omega}_{R'/R} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u} - \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \; \vec{v} + \left(\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta\right) \vec{z}_0$$

et dans la base $(\vec{u}, \vec{w}, \vec{z})$:

$$\vec{\omega}_{R'/R} = \frac{d\theta}{dt}\vec{u} + \frac{d\psi}{dt} \sin\theta \; \vec{w} + \left(\frac{d\psi}{dt} \cos\theta + \frac{d\varphi}{dt}\right) \vec{z}$$

A partir des expressions , on écrit $\vec{\omega}_{R'/R}$ dans les bases $(\vec{x}_0, \vec{y}_0, \vec{z}_0)$ et $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$

$$\vec{\omega}_{R'/R} = \left(\frac{d\theta}{dt} \cos\psi + \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \sin\psi\right) \vec{x}_0$$

$$+ \left(\frac{d\theta}{dt} \sin\psi - \frac{d\varphi}{dt} \sin\theta \cos\psi\right) \vec{y}_0$$

$$+ \left(\frac{d\psi}{dt} + \frac{d\varphi}{dt} \cos\theta\right) \vec{z}_0$$

et

$$\vec{\omega}_{R'/R} = \left(\frac{d\theta}{dt} \cos\varphi + \frac{d\psi}{dt} \sin\theta \sin\varphi\right) \vec{x}$$

$$+ \left(\frac{d\psi}{dt} \sin\theta \cos\varphi - \frac{d\theta}{dt} \sin\varphi\right) \vec{y}$$

$$+ \left(\frac{d\varphi}{dt} + \frac{d\psi}{dt} \cos\theta\right) \vec{z}$$

3- Transformation du vecteur vitesse.

a- Dérivation d'un vecteur par rapport au temps relativement aux référentiels (R) et (R')

Pour trouver les relations qui existent entre les caractéristiques cinématiques, vitesse et accélération d'un même point M, relativement à (R) et (R'), nous serons amenés à établir la relation entre les dérivées d'un même vecteur par rapport au temps relativement à (R) et (R').

Soit un vecteur $\vec{u}$ de composantes $\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3$ dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de (R) et $\vec{x}'_1, \vec{x}'_2, \vec{x}'_3$ dans la base $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ de (R'). Dans la base de (R) il s'écrit :

$$\vec{u} = x_1\ \vec{e}_1 + x_2\ \vec{e}_2 + x_3\ \vec{e}_3$$

et dans la base de (R') :

$$\vec{u} = x'_1\ \vec{e}'_1 + x'_2\ \vec{e}'_2 + x'_3\ \vec{e}'_3 \qquad (1)$$

La dérivée de $\vec{u}$ par rapport au temps dans (R) est :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R} = \frac{dx_1}{dt}\vec{e}_1 + \frac{dx_2}{dt}\vec{e}_2 + \frac{dx_3}{dt}\vec{e}_3$$

car $\left(\frac{d\vec{e}_i}{dt}\right)_{/R} = 0 \qquad i = 1,2,3$

les vecteurs $\vec{e}_i$ étant liés à (R) .

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R'} = \frac{dx'_1}{dt}\vec{e}'_1 + \frac{dx'_2}{dt}\vec{e}'_2 + \frac{dx'_3}{dt}\vec{e}'_3$$

car $\left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt}\right)_{/R'} = 0 \qquad i = 1,2,3$

les vecteurs $\vec{e}'_i$ étant liés à (R') .

Dérivons maintenant l'expression (1) dans (R)

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_R = \frac{dx'_1}{dt}\vec{e}'_1 + \frac{dx'_2}{dt}\vec{e}'_2 + \frac{dx'_3}{dt}\vec{e}'_3$$

$$+ x'_1\left(\frac{d\vec{e}'_1}{dt}\right)_{/R} + x'_2\left(\frac{d\vec{e}'_2}{dt}\right)_{/R} + x'_3\left(\frac{d\vec{e}'_3}{dt}\right)_{/R} \quad (2)$$

Or nous avons vu que si $\vec{\omega}_{R'/R}$ est la vitesse angulaire de (R') par rapport à (R) alors :

$$\left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt}\right)_R = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{e}'_i \qquad\qquad i = 1,2,3$$

donc $$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R'} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}$$

Cette expression permet bien de déterminer la dérivée du vecteur $\vec{u}$ relativement à (R) connaissant sa dérivée relativement à (R').

Notons que la relation $\left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt}\right)_{/R} = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{e}'_i$ est vérifiée quelle que soit la direction de l'axe de $\vec{\omega}_{R'/R}$ et pas nécessairement celle de $\vec{e}'_3$ comme nous l'avons supposé précédemment pour simplifier.

Remarque :

Nous pouvons déduire quelques résultats en considérant les cas particuliers suivants:

* Si (R') est en mouvement de translation par rapport à (R), dans ce cas :

$$\vec{\omega}_{R'/R} = 0 \quad \text{et} \quad \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R'}$$

* Si le vecteur $\vec{u}$ représente le vecteur rotation de (R') par rapport à (R), c'est-à-dire si on prend $\vec{u} = \vec{\omega}_{R'/R}$ l'expression (2) s'écrit alors :

$$\left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}_{R'/R}\right)_{/R} = \left(\frac{d}{dt}\vec{\omega}_{R'/R}\right)_{/R'}$$

ce qui veut dire que l'accélération angulaire de (R') par rapport à (R) définie par

$\frac{d}{dt}\vec{\omega}_{R'/R}$ est la même relativement à (R) et à (R') quel que soit le mouvement de (R') par rapport à (R).

* Dans le cas où $\vec{u}$ est un vecteur fixe dans (R').

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R'} = 0$$

d'où $$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R} = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{u}$$

* Considérons trois référentiels (R), (R_1) et (R'), tels que le référentiel (R') soit en rotation avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}_{R'/R_1}$, par rapport à (R_1), et ce dernier en rotation, avec la vitesse angulaire $\vec{\omega}_{R_1/R'}$ par rapport à (R'). Si $\vec{u}$ est un vecteur lié à (R') alors :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R'} = 0$$

d'où $$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R} = \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{u} \qquad (3)$$

et $$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R_1} = \vec{\omega}_{R'/R_1} \wedge \vec{u} \qquad (4)$$

d'autre part :

$$\left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R} = \left(\frac{d\vec{u}}{dt}\right)_{/R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R'} \wedge \vec{u} \qquad (5)$$

En portant (3) et (4) dans (5) on obtient quel que soit $\vec{u}$:

$$\vec{\omega}_{R'/R} \wedge \vec{u} = \left(\vec{\omega}_{R'/R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R}\right) \wedge \vec{u} \qquad (5')$$

donc : $\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{\omega}_{R'/R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R}$

Cette expression exprime la composition des vitesses angulaires, elle signifie que la vitesse angulaire de (R') par rapport à (R) est la somme des vitesses angulaires de (R') par rapport à (R_1) et de (R_1) par rapport à (R). En général si l'on sait décomposer un mouvement de rotation en rotations successives autour d'axes connus, on obtient l'expression de la vitesse angulaire de rotation en ajoutant (vectoriellement) les vitesses angulaires de rotation autour des différents axes.

<u>Remarque</u> :

En fait la relation (5') implique que $\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{\omega}_{R'/R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R} + k\vec{u}$ quel que soit $\vec{u}$, en particulier pour k = 0 et nous déterminons $\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{\omega}_{R'/R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R}$.

Par ailleurs, cette dernière relation peut être généralisée au cas de plusieurs référentiels intermédiaires et on montre que :

$$\vec{\omega}_{R'/R} = \vec{\omega}_{R'/R_1} + \vec{\omega}_{R_1/R_2} + \vec{\omega}_{R_2/R_3} \cdots\cdots + \vec{\omega}_{R_n/R}$$

b- Loi de compostion du vecteur vitesse

Les vitesses du même point M par rapport aux référentiels (R) et (R') sont définies par $\vec{v}(M)_{/R}$ et $\vec{v}(M)_{/R'}$:

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/R}$$

O point fixe de (R)

et $$\vec{v}(M)_{/R'} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/R'}$$

O' point fixe de (R').

En utilisant le vecteur position, $\overrightarrow{OM}$ s'écrit dans la base $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ liée à (R) :

$$\overrightarrow{OM} = x_1\ \vec{e}_1 + x_2\ \vec{e}_2 + x_3\ \vec{e}_3 = \sum_{i=1}^{3} x_i\ \vec{e}_i$$

on obtient :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}\right)_{/R} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx_i}{dt}\vec{e}_i$$

car les $\vec{e}_i$ sont fixes pour l'observateur lié à (R). De même pour le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$ dans la base $(\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ liée à (R') .

$$\overrightarrow{O'M} = x'_1\ \vec{e}'_1 + x'_2\ \vec{e}'_2 + x'_3\ \vec{e}'_3 = \sum_{i=1}^{3} x'_i\ \vec{e}'_i$$

d'où $$\vec{v}(M)_{/R'} = \left(\frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt}\right)_{/R} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx'_i}{dt}\vec{e}'_i$$

où les $\vec{e}'_i$ sont fixes pour l'observateur lié à (R').
Pour déterminer la relation entre ces vitesses on utilise l'expression

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'M}$$

en écrivant $\overrightarrow{O'M}$ dans la base de (R') , nous avons :

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO'} + x'_1\ \vec{e}'_1 + x'_2\ \vec{e}'_2 + x'_3\ \vec{e}'_3$$

En dérivant par rapport au temps dans le référentiel (R), nous avons :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt}\right)_{/R} = \sum_{i=1}^{3} \frac{dx'_i}{dt}\vec{e}'_i + \sum_{i=1}^{3} x'_i \left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt}\right)_{/R}$$

or $\quad \left(\frac{d\vec{e}'_i}{dt}\right)_{/R} = \vec{\omega}_{R'/R} \Lambda\ \vec{e}'_i$

donc $\quad \vec{v}(M)_{/R} = \vec{v}(O')_{/R} + \vec{v}(M)_{/R'} + \vec{\omega}_{R'/R} \Lambda\ \overrightarrow{O'M} \qquad (6)$

On appelle vitesse d'entrainement la somme des deux termes :

$$\vec{v}_e(M) = \vec{v}(O')_{/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \Lambda\ \overrightarrow{O'M}$$

Elle représente la vitesse d'un point P lié au référentiel mobile (R') et qui, à l'instant considéré, coïndice avec le point M, comme nous allons le montrer dans la remarque qui va suivre . Par conséquent :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \vec{v}(M)_{/R'} + \vec{v}_e(M)$$

La vitesse de M dans le référentiel mobile (R') est en général appelée "vitesse relative" $\vec{v}_r$, alors que la vitesse de M par rapport au référentiel (R) supposé fixe lors du mouvement (de (R') par rapport à (R)) est appelée "vitesse absolue" $\vec{v}_a$. Ainsi

$$\vec{v}_a = \vec{v}_r + \vec{v}_e$$

La vitesse absolue est la somme de la vitesse relative et de la vitesse d'entrainement. Notons ici que les appellations "absolue" et "relative" ne sont utilisées que par commodité de langage, car en cinématique les deux référentiels sont interchangeables.

Remarque :

Signification de la vitesse d'entrainement et du point coincidant :

Soient $(x_1x_2x_3)$ les coordonnées du point M dans (R'), et soit P un point fixe de (R') qui, à l'instant t, coincide avec M. A l'instant t les coordonnées de P qui s'écrivent : $X'_1 = x'_1(t)$, $X'_2 = x'_2(t)$ et $X'_3 = x'_3(t)$ sont donc constantes car P est fixe; P est appelé point coincidant . C'est le point fixe du référentiel mobile (R') qui, à l'instant t, coincide avec le point mobile M. Puisque le point P ne correspond plus au point coincidant à un instant t' différent de t , on notera le point coincidant à tout instant sous la forme $M \in R'$.

Donc à l'instant t on aura

$$\frac{dX'_i}{dt} = \frac{dx'_i}{dt} = 0 \qquad\qquad i = 1,2,3$$

$$\vec{v}(P)_{/R} = \vec{v}(O')_{/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'P}$$

et à tout instant on pourra écrire :

$$\vec{v}(M \in R')_{/R} = \vec{v}(O')_{/R} + \vec{\omega}_{R'/R} \wedge \overrightarrow{O'M}$$

Ceci traduit que la vitesse d'entrainement de M est égale à la vitesse du point coincidant par rapport au référentiel (R).

PARTIE B

X - Principes de la dynamique (Lois de Newton).

1- Principe d'inertie

Il existe au moins un référentiel privilégié (R_G) appelé référentiel d'inertie ou galiléen dans lequel un point matériel M isolé (c'est-à-dire qui n'est pas soumis à des actions d'autres corps) est soit au repos ($\vec{v}(M)_{/R_G} = 0$), soit en mouvement rectiligne uniforme $\vec{v}(M)_{/R_G} = \vec{cte}$

Remarques :

* Le principe d'inertie postule l' existence des référentiels galiléens et les définit en même temps.

* Si le principe d'inertie est valable dans un référentiel (R_G) , il est valable également dans tout référentiel (R) en mouvement de translation rectiligne uniforme par rapport à (R_G). En effet nous avons :

$$\vec{v}(M)_{/R_G} = \vec{v}(M)_{/R} + \vec{v}_e(M)$$

et puisque (R) est un mouvement de translation rectiligne uniforme $\vec{v}_e(M) = \vec{cte}$ nous avons par conséquent $\vec{\gamma}(M)_{/R_G} = \vec{\gamma}(M)_{/R}$ (voir transformation de Galilée § IX-5).

Ainsi, s'il existe un référentiel galiléen, il en existe une infinité en mouvement de translation rectiligne uniforme les uns par rapport aux autres.

* Selon le problème physique à traiter on fait l'approximation selon laquelle les référentiels terrestres (local ou géocentrique) ou le référentiel de Copernic sont galiléens, en fait il n'existe pas de référentiel galiléen absolu.

2- Principe fondamental de la dynamique

Par rapport à tout référentiel galiléen R_G, la résultante des forces qui s'exercent sur un point matériel M est égale à la dérivée par rapport au temps du vecteur quantité de mouvement de ce point.

$$\vec{F} = \left(\frac{d}{dt} \vec{p}(M)_{/R_G} \right)_{/R_G}$$

avec $\vec{p}(M)_{/R_G} = m\ \vec{v}(M)_{/R_G}$

Dans le cas particulier où la masse m du point matériel est constante nous avons :

$$\vec{F} = m\ \frac{d\vec{v}}{dt}(M)_{/R_G} = m\ \vec{\gamma}(M)_{/R_G}$$

Remarque :

* Le principe fondamental de la dynamique traduit le fait que lors du mouvement d'un point matériel dans un référentiel galiléen, on peut identifier deux termes de nature différente : Un terme "physique" $\vec{F}$ qui caractérise l'interaction du point matériel M avec son environnement et un terme "cinétique" $\left(\frac{d}{dt}\vec{p}(M)_{/R_G}\right)_{/R_G}$ qui caractérise l'évolution dans le temps du mouvement de ce point.

Ainsi la question essentielle qui se trouve posée lorsque l'on écrit le principe fondamental de la dynamique est celle du choix du référentiel supposé galiléen; en effet toute approximation faite dans ce choix par rapport à un "véritable" référentiel galiléen impose une modification des forces qui interviennent, sinon inévitablement certains écarts, plus ou moins sensibles, apparaissent entre les prévisions de la description par l'application du principe et le mouvement observé.

3 - Principe de l'action et de la réaction

Soit un système de deux points matériels M_1 et M_2 en interaction entre eux et soumis à leurs seules actions mutuelles.

Le principe de l'action et de la réaction affirme que la force $\vec{F}_{12}$ exercée sur M_1 par M_2 est égale et opposée à la force $\vec{F}_{21}$ exercée sur M_2 par M_1. La direction commune de $\vec{F}_{12}$ et $\vec{F}_{21}$ étant celle de $\overrightarrow{M_1M_2}$.

Ainsi le principe implique les relations simultanées :

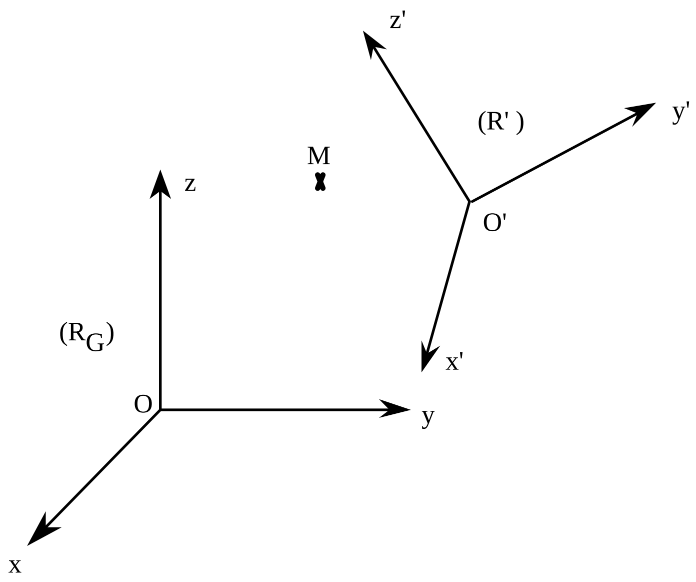
$$\vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0$$

et $\vec{F}_{12} \wedge \overrightarrow{M_1M_2} = \vec{F}_{21} \wedge \overrightarrow{M_2M_1} = 0$

Remarque :

* Toutes les forces ne vérifient pas le principe de l'action et de la réaction; c'est le cas par exemple des forces d'inertie (voir § suivant) qui ont une origine "cinématique" ou encore des

forces éléctromagnétiques qu'exercent entre elles deux charges en mouvement, leur origine étant relativiste.



D'après la loi de compostion des accélérations du mouvement de (R') par rapport à (R_G) (voir § IX-4) nous avons :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R_G} = \vec{\gamma}(M)_{/R'} + \vec{\gamma}_e(M) + \vec{\gamma}_c(M).$$

Par ailleurs, puisque (R_G) est galiléen, nous avons d'après le principe fondamental de la dynamique:

$$\vec{F} = m\,\vec{\gamma}(M)_{/R_G}$$

$\vec{F}$ étant la résultante de toutes les forces qui s'exercent sur M de la part de son environnement. En remplaçant $\vec{\gamma}(M)_{/R_G}$ par son expression (1) dans (2), nous avons :

$$\vec{F} = m\,\vec{\gamma}(M)_{/R_G} = m\vec{\gamma}(M)_{/R'} + m\vec{\gamma}_e(M) + m\vec{\gamma}_c(M)$$

soit encore : $m\vec{\gamma}(M)_{/R'} = \vec{F} - m\vec{\gamma}_e(M) - m\vec{\gamma}_c(M)$ (3)

On pose $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$, et on l'appelle force d'inertie d'entraînement tandis que $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M)$ est appelée force d'inertie de Coriolis. Ainsi la relation (3) s'écrit donc :

$m\vec{\gamma}(M)_{/R'} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

Ceci représente la formulation du principe fondamental de la dynamique dans un référentiel quelconque (R').

Remarques :

* Le principe fondamental de la dynamique peut être appliqué dans tout référentiel (galiléen ou non galiléen) à condition d'ajouter aux forces dont la résultante est $\vec{F}$ (forces d'interaction qui s'exercent sur le point M de la part de son environnement),des forces supplémentaires qui sont les forces d'inertie $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$.

* La résultante $\vec{F}$ ne change pas quand on passe d'un référentiel à un autre, alors que les forces d'inertie $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$ et $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M)$ changent puisque $\vec{\gamma}_e(M)$ et $\vec{\gamma}_c(M)$ sont déterminées par les calculs cinématiques développés précédemment (voir § XI-4) ; de ce fait on dit que ces forces d'inertie sont dues aux effets cinématiques de l'accélération dans le mouvement de (R') par rapport à (R_G).

* Les forces d'inertie $\vec{F}_e$ et $\vec{F}_c$ existent même si le point matériel M n'est soumis à aucune force ($\vec{F} = 0$) c'est-à-dire même s'il est isolé. D'un autre côté les forces d'inertie sont nulles lorsque le référentiel (R') est lui même un référentiel galiléen comme nous le montrerons dans le paragraphe qui suit.

* Les forces d'inertie ne vérifient pas le principe de l'action et de la réaction du fait qu'elles ne sont pas dues à l'action exercée sur M de la part de son environnement, leur origine étant liée plutôt aux effets cinématiques de l'accélération, comme nous venons de l' évoquer.

3- Forces d'inertie dans les cas de mouvements particuliers

a- Mouvement de translation de (R') par rapport à (R_G)

Nous avons vu dans le § IX-4 que dans le cas d'un mouvement de translation de (R') par rapport à (R_G) les accélérations d'entraînement et de Coriolis s'écrivent :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \left(\frac{d^2\overrightarrow{OO'}}{dt^2}\right)_{/R_G} = \vec{\gamma}(O')_{/R_G}$$

et $$\vec{\gamma}_c(M) = 0$$

d'où la force d'inertie d'entraînement : $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$

$$= -m\vec{\gamma}(O')_{/R_G}$$

(celle-ci s'annule si la translation de (R') par rapport à (R_G) est rectiligne et uniforme car $\vec{\gamma}(O')_{/R_G} = 0$ dans ce cas).

La force de Coriolis $\vec{F}_c = -m\vec{\gamma}_c(M)$ étant nulle dans le cas général de la translation.

b- Mouvement de rotation de (R') par rapport à (R_G) autour d'un axe (Δ) passant par O'

Nous avons vu § IX-4 que dans ce cas l'accélération d'entraînement a pour expression :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \frac{d\vec{\omega}_{R'/R_G}}{dt} \wedge \overrightarrow{O'M} - \omega^2_{R'/R_G}\,\overrightarrow{HM}$$

et la force d'inertie d'entraînement est donc :

$$\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$$

Si la rotation est uniforme, $\frac{d\vec{\omega}_{R'/R_G}}{dt} = \vec{0}$ et nous avons dans ce cas :

$$\vec{F}_e = m\,\omega^2_{R'/R_G}\,\overrightarrow{HM}$$

Cette force est dirigée de l'axe (Δ) vers le point M (H étant la projection de M sur l'axe (Δ)), c'est donc une force centrifuge.

Pour l'accélération de Coriolis nous avons vu également que :

$$\vec{\gamma}_c(M) = 2\,\vec{\omega}_{R'/R_G} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}$$

et par conséquent :

$$\vec{F}_c = -\,m\,\vec{\gamma}_c(M) = -2m\,\vec{\omega}_{R'/R_G} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}$$

Remarque :

* Nous remarquons que la force d'inertie de Coriolis $\vec{F}_c$ n'existe que si $\vec{\omega}_{R'/R_G} \neq \vec{0}$ et si le point matériel M est en mouvement dans (R') c'est à dire si $\vec{v}(M)_{/R'} \neq \vec{0}$.
Par exemple un voyageur immobile dans un bus en mouvement, est soumis à une force d'inertie d'entraînement $\vec{F}_e$ (force centrifuge) lors d'un virage, mais si pendant ce virage le voyageur se déplace dans le bus (mouvement par rapport à (R')) il sera alors soumis en plus à une force de Coriolis.

* Dans le mouvement par rapport au référentiel (R') la force de Coriolis n'effectue aucun travail. En effet :

$$\vec{F}_c = -2m\,\vec{\omega}_{R'/R_G} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}$$

Un déplacement élémentaire de M dans son mouvement par rapport à (R') sous l'effet de $\vec{F}_c$ s'écrit :

$$d\vec{M} = \vec{v}(M)_{/R'}\,dt$$

le travail de $\vec{F}_c$ lors de ce déplacement est donc :

$$dW = \vec{F}_c . d\vec{M}$$
$$= \vec{F}_c . \vec{v}(M)_{/R'}\,dt$$

* On appelle forces gyroscopiques les forces du type de la force de Coriolis, c'est-à-dire celles qui dépendent de la vitesse du point matériel et qui agissent selon la direction perpendiculaire à cette vitesse. Comme autre exemple citons également la force de Lorentz $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

4- Equilibre d'un point matériel dans un référentiel non galiléen

Un point M est en équilibre dans un référentiel (R'), si le vecteur position $\overrightarrow{O'M}$

qui définit le point matériel M dans (R') est une constante vectorielle (par rapport au temps) c'est-à-dire encore que $\vec{v}(M)_{/R'} = \vec{0}$ et $\vec{\gamma}(M)_{/R'} = \vec{0}$

Deux cas peuvent être envisagés :

- Si (R') est galiléen (R') = (R'_G), nous avons alors d'après le principe fondamental de la dynamique :

$$\vec{F} = m\,\vec{\gamma}(M)_{/R'_G}$$

et d'après les conditions d'équilibre :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R'_G} = 0$$

par conséquent ceci implique que la résultante $\vec{F}$ des forces qui agissent sur le point M est nulle.

- Si (R') n'est pas un référentiel galiléen, nous avons :

$m\,\vec{\gamma}(M)_{/R'} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$

$$m\,\vec{\gamma}(M)_{/R'} = \vec{F} + \vec{F}_e + \vec{F}_c$$

Les conditions d'équilibre dans (R') impliquent :

$$\vec{F}_c = -2m\,\vec{\omega}_{R'/R_G} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}$$

$$= \vec{0} \quad (\text{ car } \vec{v}(M)_{/R'} = \vec{0}\ )$$

et $\quad \vec{\gamma}(M)_{/R'} = \vec{0}$

d'où : $\vec{F} + \vec{F}_e = \vec{0}$

Dans ce cas la résultante des forces (autres que les forces d'inertie) qui s'exerce sur le point matériel M en équilibre est égale et opposée à la force d'inertie d'entraînement.

XII - <u>Application des référentiels non galiléens à la dynamique terrestre</u>.

1- Notion de poids d'un corps . Pesanteur

a- Définition

Soit un référentiel terrestre (R) et M un point matériel de masse m ; on appelle force de la pesanteur terrestre (ou tout simplement poids) la force opposée à celle qui maintient le point M en équilibre dans (R).

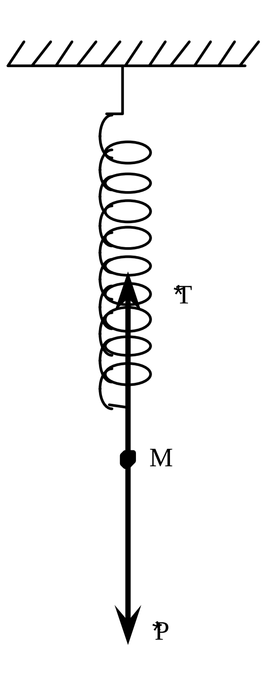
C'est donc la force qui compense celle qui maintient M en équilibre.

<u>Exemple</u> :

Une masse ponctuelle M à l'extrémité d'un ressort est soumise, à l'équilibre, à son

poids $\vec{P}$ qui compense la tension $\vec{T}$ du ressort sur M (voir figure XII.1). Ainsi nous avons :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$



b - Causes de la pesanteur

Le référentiel terrestre (R) est supposé non galiléen. Le point matériel M est alors soumis aux forces suivantes : les forces de gravitation $m\vec{G}(M)$, où $\vec{G}(M)$ est le champ de gravitation produit par la Terre et par les autres planètes , astres etc…; les forces d'inertie $-m\vec{\gamma}_e(M)$ et $-m\vec{\gamma}_c(M)$ puisque (R) n'est pas Galiléen.

A l'équilibre du point M dans le référentiel (R) nous avons :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \vec{0} \text{ (donc } \vec{\gamma}_c(M) = \vec{0} \text{)}$$

et également :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \vec{0}$$

Soit $\vec{T}$ la force qui maintient à l'équilibre le point M. Nous avons :

$$\vec{T} + m\vec{G}(M) - m\vec{\gamma}_e(M) = \vec{0}.$$

Par définition le poids $\vec{P}$ est tel que :

$$\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$$

d'où :

$$\vec{P} = m\vec{G}(M) - m\vec{\gamma}_e(M)$$

L'origine du poids (pesanteur) est donc due, d'après la relation précédente, à la gravitation et à la force d'inertie d'entraînement.

<u>Remarque</u> :

Principe d'équivalence :

Dans un champ de gravitation, en mécanique non relativiste, tous les corps ont le même mouvement et ce, indépendamment de leur masse pour des conditions initiales supposées identiques.

Cette propriété fondamentale des champs de gravitation permet de faire une analogie entre le mouvement d'un point matériel (ou d'un corps quelconque) dans un champ gravitationnel et le mouvement du point matériel dû aux "forces de repère" c'est-à-dire lorsque l'on considère le référentiel non galiléen, (ou non inertiel).

Le principe d'équivalence établit donc une équivalence de nature entre le champ de gravitation et un référentiel non inertiel.

On montre alors qu'il y a identité entre la masse pesante (celle qui intervient dans la détermination du champ de gravitation) et la masse inerte (celle qui intervient dans le principe fondamental).

Si le principe d'équivalence concerne la nature des forces de gravitation et des forces de repère, des différences entre ces deux types de forces apparaissent notamment entre leurs propriétés à l'infini. Par exemple le champ de gravitation s'annule à l'infini alors que ceci n'est pas le cas pour les champs qui ont pour équivalent des référentiels non inertiels (exemple des forces centrifuges qui augmentent d'amplitude avec la distance).

Une autre différence essentielle provient du fait que les champs de gravitation persistent et ne peuvent être éliminés quelle que soit la nature du référentiel dans lequel on se place, alors que les champs dûs aux repères s'annulent et par conséquent s'éliminent lorsqu'on passe à un référentiel galiléen.

2- Principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre (R)

Soit M un point matériel soumis à :

. des forces de résultante $\vec{F}_1$ autres que les forces de gravitation et que les forces d'inertie ;
. des forces d'inertie d'entraînement $\vec{F}_e = -m\vec{\gamma}_e(M)$ et de Coriolis $\vec{F}_c = -\ m\vec{\gamma}_c(M) = \ -2m\ \vec{\omega}\ \Lambda\ \ \vec{v}(M)_{/R}$ (avec $\vec{\omega} = \omega_{R/R_G}$).
. des forces de gravitation $m\vec{G}(M)$

Dans le référentiel terrestre (R) supposé non galiléen le principe fondamental de la dynamique s'écrit :

$$m\vec{\gamma}(M)_{/R} = \vec{F}_1 + m\vec{G}(M) - m\vec{\gamma}_e(M) - 2m\ \vec{\omega}\ \Lambda\ \vec{v}(M)_{/R}$$

or nous avons vu (voir XII-1) que le poids $\vec{P}$ est défini par :

$$\vec{P} = m\vec{G}(M) - m\vec{\gamma}_e(M)$$

d'où :

$$m\vec{\gamma}(M)_{/R} = \vec{F}_1 + \vec{P} - 2m\ \vec{\omega}\ \Lambda\ \vec{v}(M)_{/R}$$

3- Champ de la pesanteur terrestre - Verticale d'un lieu

Soit m la masse du point matériel M ; on définit le champ de la pesanteur terrestre par :

$$\vec{g} = \frac{\vec{P}}{m} = \vec{G}(M) - \vec{\gamma}_e(M) \qquad (2)$$

$\vec{G}(M)$ est le champ de gravitation en un point M , dû à l'attraction terrestre ainsi qu'à l'attraction des autres astres. En explicitant les différentes contributions à $\vec{G}(M)$ nous avons donc la contribution terrestre au point M :

$$\vec{G}_T(M) = -\frac{G_0 M_T}{r^2}\ \vec{u}$$

avec :

$G_0 = 6{,}67\ 10^{-11}\ Nm^2/Kg^2$ constante universelle de gravitation

M_T = masse de la Terre

r = CM

$\vec{u} = \dfrac{\overrightarrow{CM}}{|CM|}$ vecteur unitaire ; C étant le centre de masse de la Terre .

Par ailleurs soit $\vec{G}_1(M)$ la contribution due aux autres astres au niveau du point M.
Le champ de gravitation total est donc :

$$\vec{G}(M) = \vec{G}_T(M) + \vec{G}_1(M) \qquad (3)$$

Dans l'expression (2) intervient l'accélération d'entraînement du point M , le référentiel terrestre (R) considéré n'étant pas galiléen.

Si nous nous plaçons dans le cas particulier où le référentiel (R) est lié à la Terre avec pour origine le centre de masse C et si nous considérons comme référentiel galiléen (R_G) le référentiel géocentrique, la vitesse de rotation ω_{R/R_G} dans ce cas est la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles; cette vitesse est supposée constante.

Ainsi dans le mouvement de (R) par rapport à (R_G), l'accélération d'entraînement s'écrit sous la forme déjà rencontrée (voir IX-8).

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(C)_{/R_G} + \frac{d\vec{\omega}_{R/R_G}}{dt}\ \Lambda\ \overrightarrow{CM} - \omega^2_{R/R_G}\ \overrightarrow{HM} \qquad (4)$$

H étant la projection de M sur l'axe de $\vec{\omega}_{R/R_G}$ (passant par C) , c'est à dire sur l'axe des pôles. Puisque $\vec{\omega}_{R/R_G} = \overrightarrow{cte}$ et $\frac{d\vec{\omega}_{R/R_G}}{dt} = \vec{0}$, l'expression de $\vec{\gamma}_e(M)$ devient :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{\gamma}(C)_{/R_G} - \omega^2_{R/R_G}\ \overrightarrow{HM}$$

$\vec{\gamma}(C)_{/R_G}$ est l'accélération du centre de masse de la Terre, elle est égale à l'accélération exercée par les autres astres sur la Terre, c'est-à-dire:

$\vec{\gamma}(C)_{/R_G} = \vec{G}_1(C)$

et par conséquent, en remplaçant dans (4) nous avons :

$$\vec{\gamma}_e(M) = \vec{G}_1(C) - \omega^2_{R/R_G}\ \overrightarrow{HM} \qquad (4')$$

En tenant compte de (3) et (4') dans (2) nous déduisons le champ de la pesanteur terrestre :

$$\vec{g} = \vec{G}_T(M) + \vec{G}_1(M) - \vec{G}_1(C) + \omega^2_{R/R_G}\ \overrightarrow{HM} \qquad (5)$$

avec respectivement :

$\vec{G}_T(M)$ champ de gravitation exercé par la Terre seule au point M .(c'est-à-dire

$\vec{G}_1(M)$ champ de gravitation exercé par les astres (autres que la Terre) au point M.

$\vec{G}_1(C)$ champ de gravitation exercée par les astres autres que la Terre au centre de masse C de celle-ci.

Posons dans la relation (4) $\vec{g} = -g\ \vec{u}'$ avec $\vec{u}'$ le vecteur unitaire de la direction résultante des différentes contributions vectorielles à l'expression de $\vec{g}$ (voir Fig.XII.2)

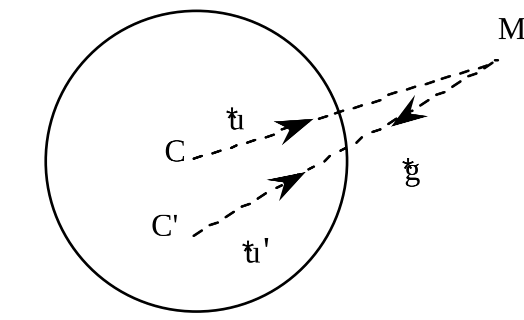


Fig.XII.2

Cette direction de $\vec{u}'$ et donc de $\vec{g}$ représente la verticale au point M c'est-à-dire la direction du fil à plomb. Le plan perpendiculaire à cette direction verticale est le plan horizontal au lieu considéré.

Remarque :

* Dans l'expression (5) :

$$\vec{g} = \vec{G}_T(M) + \vec{G}_1(M) - \vec{G}_1(C) + \omega^2_{R/R_G}\ \overrightarrow{HM}$$

le terme $\vec{G}_T(M)$ qui est dû à la Terre est prédominant.

Par ailleurs, $\vec{G}_1(M) - \vec{G}_1(C)$ représente la variation du champ de gravitation (dû aux astres et planètes autre que la Terre) aux points M et C. Cette différence que l'on néglige en général permet d'expliquer le phénomène des marées, conséquence de la non uniformité en tout point de la Terre du champ de gravitation $\vec{G}_1(M)$.

4 - Variation du champ de la pesanteur avec la latitude

Représentons sur les figures XII (3 ; 3') un point M de latitude λ sur la surface de la Terre.

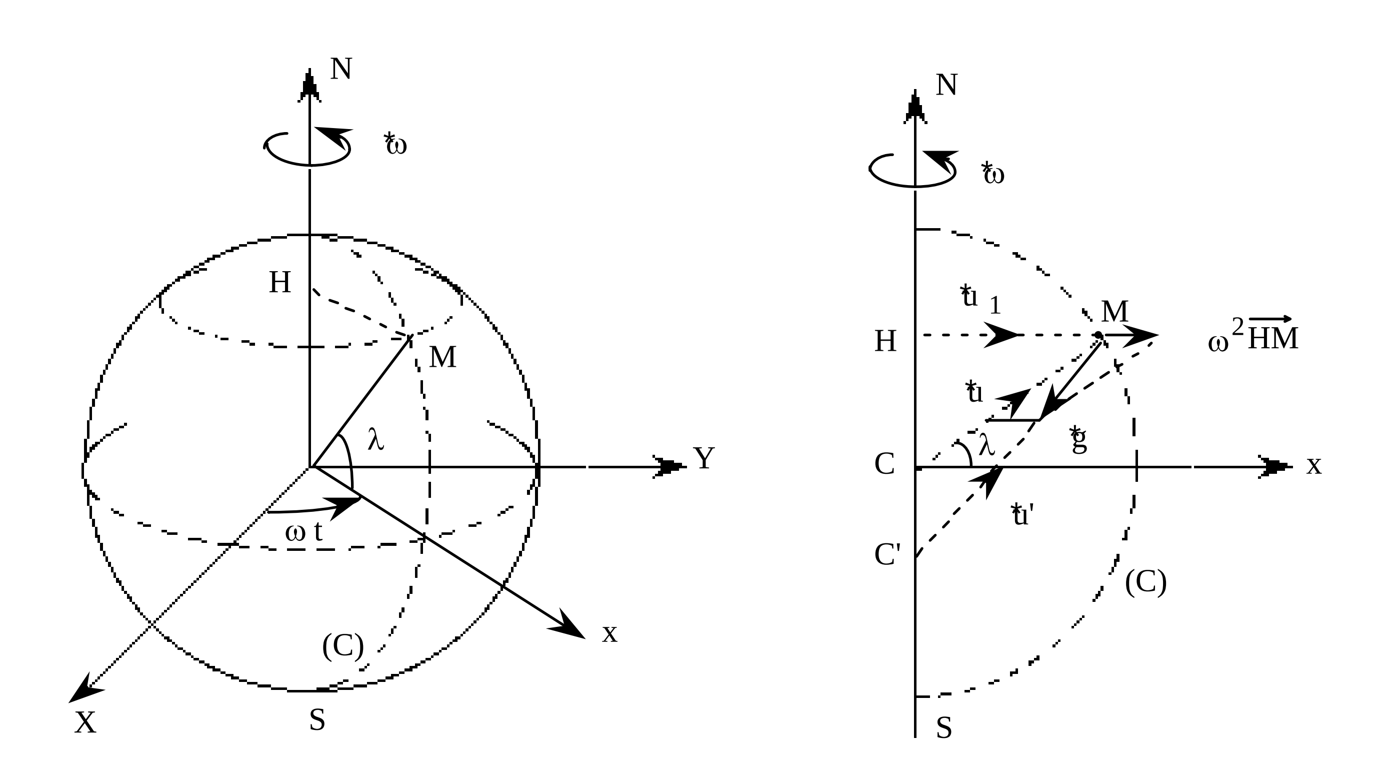


Fig. XII.(3 ; 3')

Nous avons vu précédemment que l'on a :

$$\vec{g} = \vec{G}_T(M) + \vec{G}_1(M) - \vec{G}_1(C) + \omega^2 \overrightarrow{HM}$$

$\vec{\omega} = \vec{\omega}_{R/R_G}$ est la vitesse de rotation de la Terre autour de l'axe des pôles.

Nous négligeons le terme $\vec{G}_1(M) - \vec{G}_1(C)$; en effet la distance CM entre le centre de la Terre et le point M sur sa surface (ou en son voisinage), est relativement faible pour que le champ de gravitation $\vec{G}_1$ soit considéré comme à peu près le même en ces deux points C et M. Nous avons alors :

$$\vec{g} = \vec{G}_T(M) + \omega^2 \overrightarrow{HM} = - g\ \vec{u}'$$

$$\vec{G}_T(M) = - g_0\ \vec{u} \quad \text{avec} \quad g_0 = \frac{G_0}{r^2} M_T$$

$$\overrightarrow{HM} = HM\ \vec{u}_1 = R \cos\lambda\, \vec{u}_1 \quad \text{avec} \quad \vec{u}_1 = \frac{\overrightarrow{HM}}{|HM|}$$

Ainsi le champ $\vec{g}$ s'écrit de manière plus explicite :

$$\vec{g} = - g_0\ \vec{u} + (R\omega^2 \cos\lambda)\ \vec{u}_1$$

et par conséquent varie avec la latitude λ du point M.

<u>Remarques</u> :

* Si le point M est au pôle ($\lambda = \frac{\pi}{2}$, HM = R) alors $\vec{g} = - g_0\ \vec{u}$ car le terme centrifuge $\omega^2\ \overrightarrow{HM} = (R\omega^2 \cos\lambda)\ \vec{u}_1$ s'annule. Le module du champ $\vec{g}$ est alors maximum :

$$g = (g_0)_{pôle} = \frac{G_0\, M_T}{R^2} = 9.832\ m/s^2$$

Si le point M est à l'équateur ($\lambda = 0$, HM = R') nous avons :

$$\vec{g} = - g\ \vec{u}' = - g_0\ \vec{u} + (R'\omega^2 \cos\lambda)\ \vec{u}_1$$

les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{u}'$ et $\vec{u}_1$ étant colinéaires à l'équateur nous avons, compte tenu de $\lambda = 0$:

$$g = (g_0)_{équateur} - R'\ \omega^2$$

avec $\omega \approx 7.3\ 10^{-5}$ rad/s, R' le rayon de la Terre à l'équateur, $(g_0)_{équateur} = \frac{G_0}{R'^2} M_T$

* En principe si la Terre était sphérique, on aurait $(g_0)_{pôle} = (g_0)_{équateur}$; cependant la Terre étant applatie aux pôles et par conséquent $(R)_{pôle} = R < (R)_{équateur} = R'$, nous avons alors :

$$(g_0)_{équateur} < (g_0)_{pôle}$$

La valeur à l'équateur est 9.814 m/s^2 et celle aux pôles est 9.832 m/s^2.

5 - Etat d'apesanteur dans un satellite artificiel

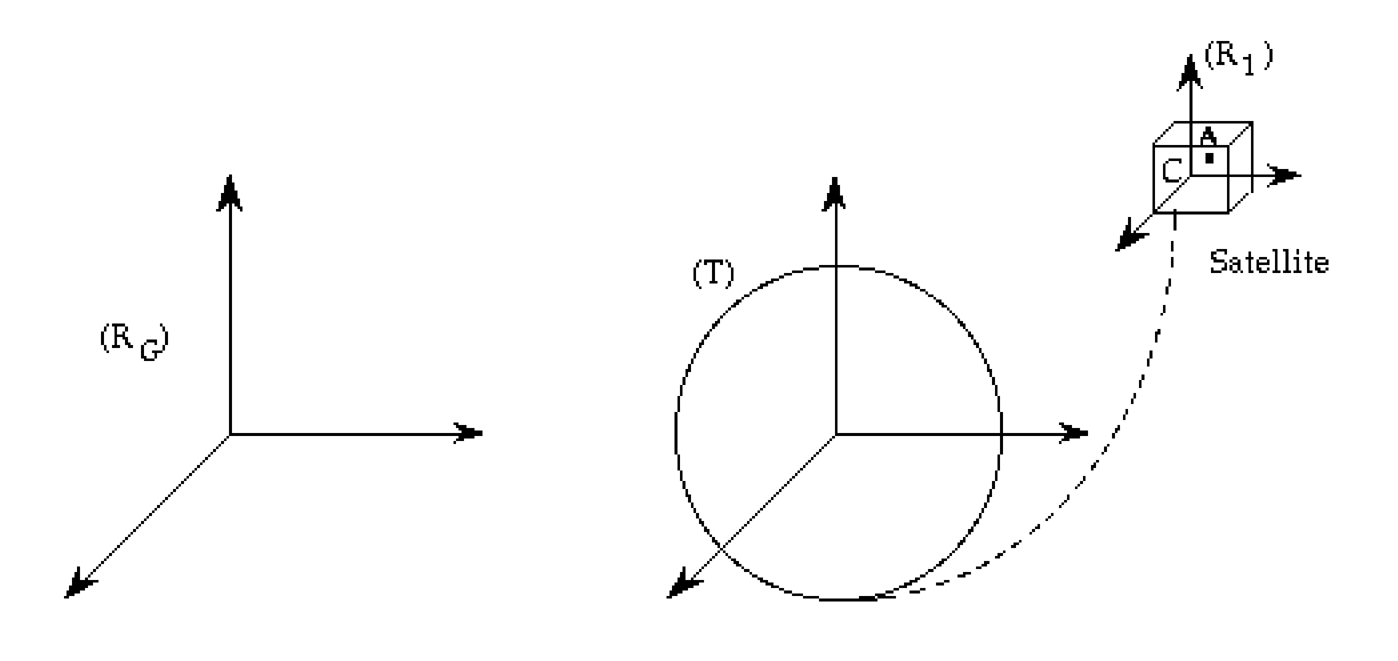


Fig. XII.4

Il s'agit de voir dans quelles conditions un point matériel A en mouvement dans un satellite artificiel se trouve en étant d'apesanteur, c' est à dire qu'il "ne réagit pas" à l'action du champ de gravitation extérieure.

Soit donc un satellite artificiel de centre de masse C et de masse M, et en mouvement par rapport à un référentiel galiléen (R_G); supposons que les moteurs du satellite sont arrêtés, (voir figure XII.4).

Ce satellite est soumis aux forces dues à la gravitation de la Terre (T), et des autres astres. Soit par ailleurs (R_1) le référentiel lié au satellite et A un "point matériel" (le centre d'inertie d'un passager par exemple) de masse m en mouvement par rapport à (R_1).

Le point A est soumis en principe : aux forces de gravitation $\vec{G}(A)$, aux forces d'inertie $-m\vec{\gamma}_e(A)$ et $-2m\ \vec{\omega}_{R_1/R_G} \wedge \vec{v}(A)_{/R_1}$ et aux forces $\vec{F}_1$ autres que la gravitation.

Supposons que le satellite a les moteurs arrêtés et ne tourne pas par rapport à R_G ; nous avons donc de ce fait la force d'inertie de Coriolis nulle :

$$-2m\ \vec{\omega}_{R_1/R_G} \wedge \vec{v}(A)_{/R_1} = \vec{0}$$

L'équation du principe fondamental de la dynamique appliquée dans (R_1) dans son mouvement par rapport à (R_G), s'écrit :

$$m\vec{\gamma}(A)_{/R_1} = \vec{F}_1 + m\vec{G}(A) - m\vec{\gamma}_e(A) \ -2m\ \vec{\omega}_{R_1/R_G} \wedge \vec{v}(A)_{/R_1} \qquad (6)$$

et en tenant compte de l'hypothèse où les moteurs sont arrêtés nous avons :

$$m\vec{\gamma}(A)_{/R_1} = \vec{F}_1 + m\vec{G}(A) - m\vec{\gamma}_e(A) \qquad (7)$$

Vis à vis de la cabine et du passager, la Terre, la Lune, le Soleil etc, créent un champ de gravitation extérieur qui sera considéré comme homogène, les dimensions de la cabine étant supposée suffisamment petite. Dans ce cas on a :

$$\vec{\gamma}_e(A) \approx \vec{G}(C)$$

C étant le centre de masse de la cabine.

Par ailleurs $\vec{\gamma}_e(A)$ étant l'accélération du point fixe de (R_1) qui coïncide avec A et nous avons également :

$$\vec{\gamma}_e(A) = \vec{G}(A) = \vec{G}(C)$$

d'où finalement d'après l'expression (7) :

$$m\vec{\gamma}(A)_{/R_1} = \vec{F}_1$$

Si A n'est soumis à aucune force autre que la gravitation, l'accélération de A par rapport à (R_1) est alors nulle.

$$\vec{\gamma}(A)_{/R_1} = \vec{0}$$

Le point A ne subit pas dans ce cas l'action du champ de gravitation extérieur qui se trouve compensé par la force d'inertie $-m\vec{\gamma}_e(A)$; on dit alors que A se trouve en état d'apesanteur "locale".

Remarque :

* Quant la capsule a un mouvement de rotation, c'est-à-dire $\omega_{R1/RG} \neq 0$, il apparait un terme non compensé $-2m\ \vec{\omega}_{R_1/R_G} \wedge \vec{v}(A)_{/R_1}$ ce qui provoque une "pesanteur artificielle" sur A .

De même si les moteurs de propulsion fonctionnent, $\vec{F}_1$ (qui comprend notamment les forces de propulsion) n' est pas nulle et dans ce cas également le corps A n' est plus en état d'apesanteur.

6 - Déviation vers l'Est des trajectoires de chute libre

a- Description du problème

Soit (R) un référentiel terrestre supposé non galiléen. Nous avons vu que par rapport à ce référentiel nous avons :

$$m\vec{\gamma}(M)_{/R} = \vec{F}_1 + \vec{P} \ - 2m\ \vec{\omega}_{R_1/R_G} \wedge \vec{v}(M)_{/R} \qquad (8)$$

$\vec{F}_1$ résultante des forces autres que les forces gravitation ;

$\vec{P} = m\vec{g} = m\ \vec{G}(M) - m\vec{\gamma}_e(M)$

ω = vitesse de rotation de la Terre

Il s'agit d'étudier le mouvement de chute libre ($\vec{F}_1 = 0$) d'un point matériel M à partir d'un point M_0 d'altitude h, sans vitesse initiale ($t = 0$, $\vec{v}(M_0) = 0$)

Ainsi dans le mouvement de chute libre le point M sera soumis à son poids $\vec{P}$ et à la force de Coriolis $\vec{F}_c = -2m\ \vec{\omega}_{R_1/R_G} \wedge \vec{v}(M)_{/R}$

On montre que la trajectoire de chute libre subit une dérivation vers l'Est et vers l'équateur. C'est ce que nous allons établir à partir des équations du mouvement.

b - Equations du mouvement

Soit O'xyz un système d'axes terrestres tels que $O'\vec{z}$ correspond à la verticale ascendante (ne passant pas par le centre de la Terre car le poids comprend la force d'entraînement), $O'\vec{x}$ est tangent au cercle parallèle en O', et orienté vers l'Est, $O'\vec{y}$ est tangent au méridien en O' et orienté vers le Nord (voir figures XII.5 ; 5'); λ étant la latitude de O' avec ($|\lambda| \leq \frac{\pi}{2}$).

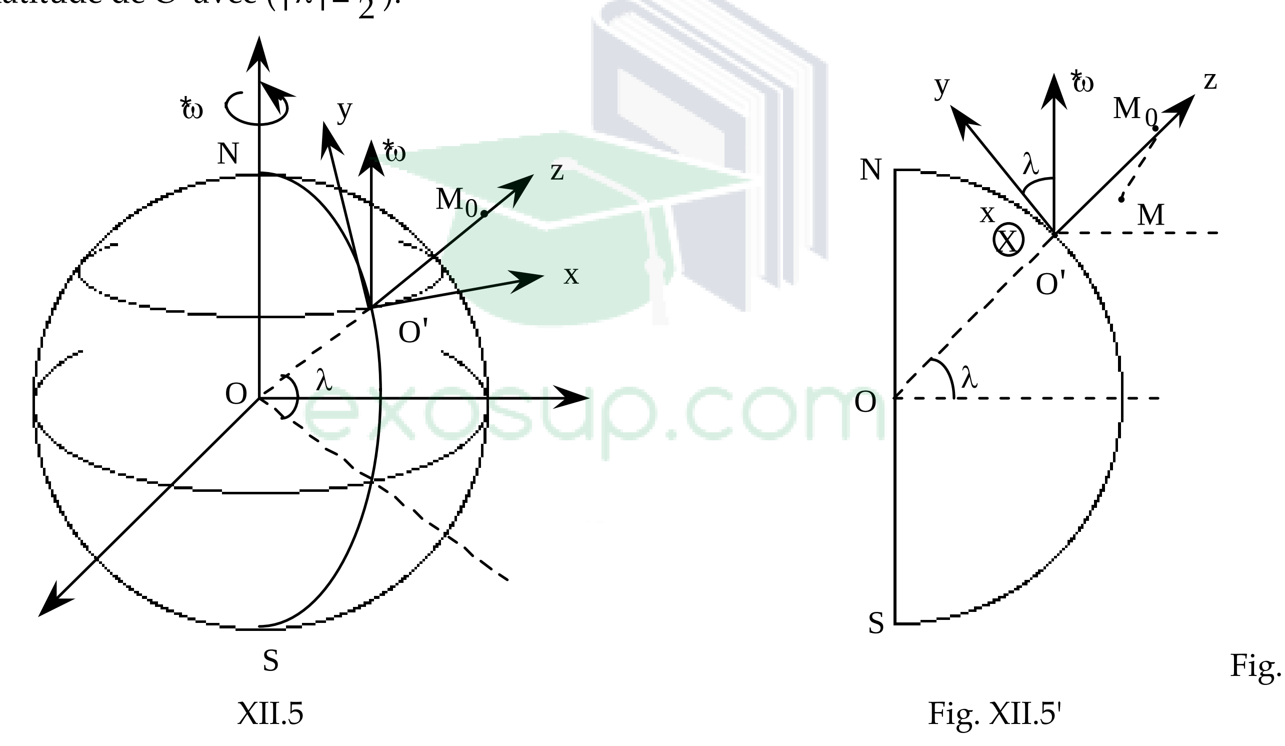


Fig. XII.5 Fig. XII.5'

L'équation du mouvement d'un point matériel M en chute libre est donc d'après l'équation (8) :

$$m\vec{\gamma}(M)_{/R} = m\vec{g} - 2m\vec{\omega}\wedge\vec{v}(M)_{/R}$$

Dans le système d'axes O'xyz nous avons :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R} = \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{\omega}\begin{pmatrix} 0 \\ \omega\cos\lambda \\ \omega\sin\lambda \end{pmatrix} \quad ; \quad \vec{v}(M)_{/R} = \begin{pmatrix} \frac{d\ x}{dt} \\ \frac{d\ y}{dt} \\ \frac{d\ z}{dt} \end{pmatrix}$$

et l'équation précédente projetée sur les axes nous donne le système suivant :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega\left(\frac{dz}{dt}\cos\lambda - \frac{dy}{dt}\sin\lambda\right) \qquad 9(a)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -2\omega\frac{dx}{dt}\sin\lambda \qquad 9(b)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g + 2\omega\frac{dx}{dt}\cos\lambda \qquad 9(c)$$

avec les conditions initiales :

$t = 0$ $\quad x = 0$ $\quad \frac{dx}{dt} = \frac{dy}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0$

$y = 0$

$z = h$

correspondant pour $t = 0$ au point M_O d'altitude h et de vitesse $\vec{v}(M_0) = \vec{0}$

L'intégration des équations (9a), (9b) et (9c) entre $t = 0$ et un instant t quelconque pour lequel

les coordonnées de M sont x,y,z nous donne respectivement :

$$\frac{dx}{dt} = -2\omega[(\cos\lambda)(z-h) - y\sin\lambda] \qquad (10a)$$

$$\frac{dy}{dt} = -(2\omega\sin\lambda)\,x \qquad (10b)$$

$$\frac{dz}{dt} = -gt + (2\omega\cos\lambda)\,x \qquad (10c)$$

Nous reportons (10b) et (10c) dans (9a) pour déduire x(t)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -2\omega[(-gt + 2\omega x\cos\lambda)\cos\lambda + 2\omega x\sin\lambda]$$

soit encore :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\omega^2 x = 2\omega\, gt\cos\lambda \qquad (11)$$

La solution générale de cette équation est de la forme :

$$x(t) = x_0(t) + x_1(t)$$

avec $x_0(t) = \frac{2\omega}{4\omega^2} gt \cos\lambda = \frac{gt}{2\omega} \cos\lambda$

qui est une solution particulière de (11) et $x_1(t)$ la solution générale de l'équation (11) sans second terme, c'est-à-dire de l'équation:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\,\omega^2 x = 0$$

donc $x_1(t) = A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t$

et par conséquent la solution général de (11) :

$$x(t) = \frac{gt}{2\omega} \cos\lambda + A \cos 2\omega t + B \sin 2\omega t$$

Les constantes A et B sont déterminées à partir des conditions initiales :

$$x(t = 0) = 0 \quad \text{d'où} \quad A = 0$$

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} = [\frac{g}{2\omega} \cos\lambda - 2\omega\, A \sin 2\omega t + 2\omega B \cos 2\omega t]_{t=0}$$

$$= \frac{g}{2\omega} \cos\lambda + 2\omega B$$

$$= 0$$

d'où $B = \frac{-g\cos\lambda}{4\omega^2}$

Ainsi la solution générale s'écrit en définitive :

$$x(t) = \frac{-g\cos\lambda}{4\omega^2} [\,(\sin 2\omega t) - 2\omega t]$$

La vitesse angulaire de rotation de la Terre est $\omega = 7.29\ 10^{-5}$ rad/s ; par ailleurs si on suppose la durée de chute libre relativement petite, on peut remplacer dans l'expression précédente $\sin 2\omega t$ par les premiers termes de son développement en série :

$$\sin 2\omega t \approx 2\omega t - \frac{(2\omega t)^3}{3!}$$

d'où :

$$x(t) = \frac{-g\cos\lambda}{4\omega^2} [\,2\omega t - \frac{(2\omega t)^3}{3!} - 2\omega t]$$

$$= (\omega g \frac{\cos\lambda}{3})\, t^3$$

puisque $|\lambda| \leq \frac{\pi}{2}$, $\cos\lambda$ est positif (ou nul) et par conséquent $x(t)$ qui représente la projection selon O'x de la position du point matériel M à l'instant t, est également positive (ou nulle) ; $x(t) > 0$ correspond à une déviation vers l'Est de la trajectoire du point M.

Pour déterminer y(t) nous partons de l'équation (10b) dans laquelle nous remplaçons x(t) par son expression (12).
En effet :

$$\frac{dy}{dt} = -(2\omega \sin\lambda)\, x$$

$$= -(2\omega \sin\lambda)\,(\omega g \frac{\cos\lambda}{3})\, t^3$$

$$= -\frac{\omega^2}{3} g\,(\sin 2\lambda)\, t^3$$

et en intégrant entre les instants 0 et t et compte tenu des conditions initiales, nous obtenons :

$$y(t) = -\frac{\omega^2}{12} g\,(\sin 2\lambda)\, t^4$$

Dans l'hémisphère Nord ($0 < \lambda \leq \frac{\pi}{2}$, y(t) est négatif tandis que dans l'hémisphère sud ($-\frac{\pi}{2} \leq \lambda < 0$, y(t) est alors positif. Dans les deux cas il y a donc une déviation de la trajectoire vers l'Equateur (en plus de la déviation vers l'Est).

Pour déterminer z(t), nous remplaçons également x(t) dans l'expression (10c). En effet :

$$\frac{dz}{dt} = -gt + (2\omega \cos\lambda)\, x$$

$$= -gt + (2\omega \cos\lambda)\,(\omega g \frac{\cos\lambda}{3})\, t^3$$

$$= -gt + \frac{2\omega^2}{3} g\,(\cos\lambda)^2\, t^3$$

en intégrant entre les instants 0 et t, compte tenu des conditions initiales, nous obtenons :

$$[z(t)]_0^t = -g\frac{t^2}{2} + \omega^2 g \frac{\cos^2\lambda}{6} t^4$$

$$z(t) = h - g\frac{t^2}{2} + \omega^2 g \frac{\cos^2\lambda}{6} t^4$$

et en négligeant le terme en t^4 nous avons alors :

$$z(t) = h - g\frac{t^2}{2} \qquad (14)$$

Remarque :

* Nous pouvons déterminer le point d'impact au sol du point matériel M. Au sol z = 0 et d'après (14)

$$h - g\,\frac{t_0^2}{2} = 0 \qquad \text{d'où } t_0 = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

dans (12) nous pouvons déduire :

$$x_0 = x(t=0) = g\,\frac{\cos\lambda}{3}\,\omega\left(\frac{2h}{g}\right)^{3/2}$$

et dans (13) nous avons

$$y_0 = y\,(t=0) = -\,\frac{\omega^2}{3g}\,\sin 2\lambda$$

les coordonnées du point d'impact au sol du point matériel M lâché en chute libre sont (x_0 , y_0 , 0).

(Extrait du document "cours de Mécanique" : http://www.fsr.ac.ma/LMPHE/

7 - Pendule de Foucault

a- principe

Soit un pendule (SM) oscillant sur une plateforme tournante ; (R) un référentiel fixe (absolu) et (R') un référentiel (relatif) lié à la plateforme (voir figure XII.6).

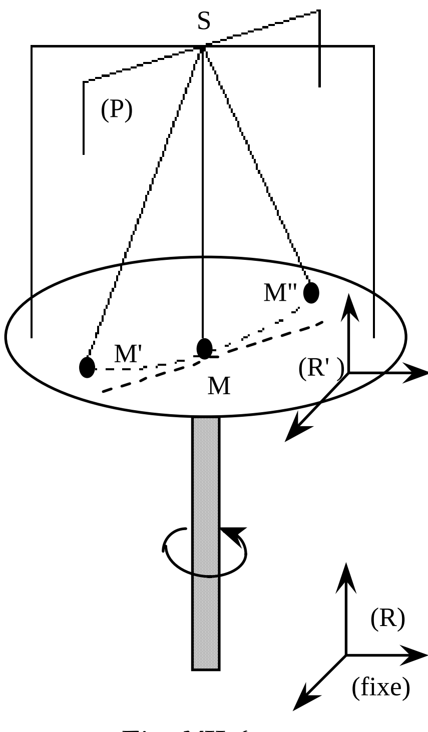


Fig. XII.6

Pour un observateur lié au référentiel fixe (R) le pendule oscille dans un plan invariable (P) = (SM'M"). Pour un observateur lié à la plateforme tournante; c'est-à-dire lié à (R'), le plan (P) d'oscillation tourne par rapport à l'observateur dans le sens inverse de la rotation de la plateforme. Ceci s'interprète par le fait que par rapport à (R') le point M (masse à l'extrémité du pendule) est en mouvement sous l'action du poids, de la tension et des forces d'inertie.

Le fait que le plan (P) varie traduit le caractère non absolu du référentiel (R'). Le pendule de Foucault illustre bien ceci dans le cas de la Terre; c'est-à-dire que celle-ci ne constitue pas un référentiel d'inertie (ou galiléen).

En effet l'expérience de Foucault faite en 1851 à Paris sur un pendule de masse m = 28 Kg suspendue à un fil de longueur l = 67 m a permis de montrer que le plan d'oscillation du pendule se déplaçait dans le sens de rotation des aiguilles d'une montre et faisait un tour complet en 32h environ. Ce déplacement du plan d'oscillation traduit le caractère non galiléen du référentiel lié à la Terre.

b - Equations du mouvement

Soit (R') : (O'xyz) le référentiel local lié à la Terre tel que $\overrightarrow{O'z}$ soit la verticale ascendante, $\overrightarrow{O'x}$ tangent au plan parallèle et orienté vers l'Est et $\overrightarrow{O'y}$ tangent au demi plan méridien orienté vers le Nord (voir fig. XII.7); et soit (R) le référentiel géocentrique supposé galiléen. (R') est en mouvement de rotation par rapport à (R); le vecteur rotation ω est alors situé dans le dmi-plan méridien (O'y,O'z).

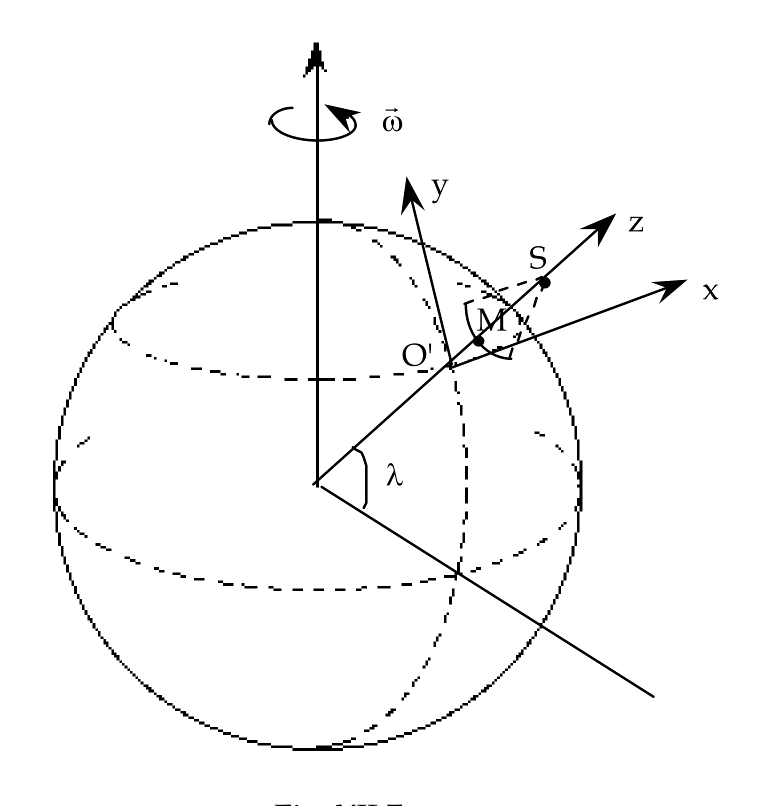
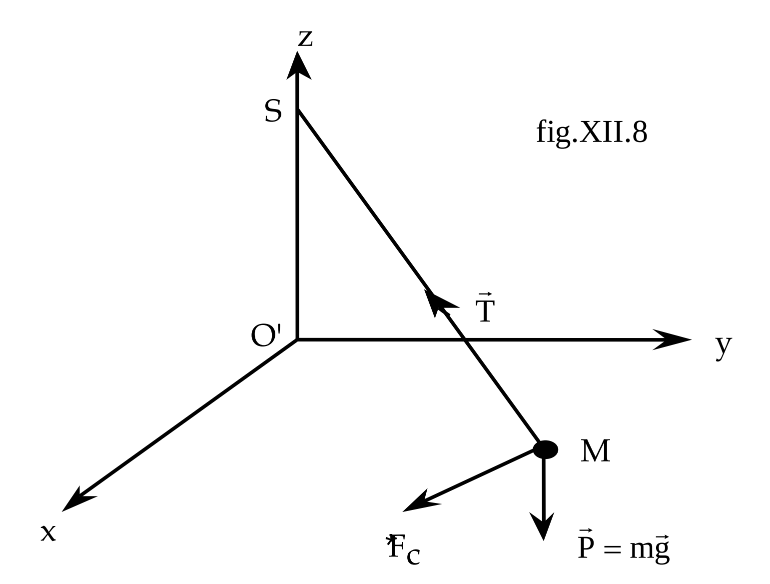


Fig. XII.7

La masse m du pendule de sommet S et de longueur l est soumise aux forces suivantes : le poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\ \vec{e}_z$, la tension $\vec{T}$ du fil et la force de Coriolis $\vec{F}_c = -2m\ \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/R'}$ (voir fig. XII.8).



En général pour un référentiel terrestre la force d'inertie est négligée en première approximation. En effet, l'accélération d'entraînement d'un repère lié à la Terre résulte de l'interaction de gravitation exercée sur la Terre par les autres astres (Lune et autres planètes, Soleil…), la Lune et le Soleil exerçant l'essentiel de cette action; or l'action de la Lune sur un objet terrestre est de $\frac{|g|}{8.75\ 10^6}$ environ, celle du soleil étant encore plus faible.

Ainsi donc, c'est la force d'inertie de Coriolis normale au plan d'oscillation du pendule qui détermine la rotation de ce plan.

Par rapport à (R') nous avons donc :

$$m\ \vec{\gamma}(M)_{/R'} = m\vec{g} + \vec{T} - 2m\ \vec{\omega} \wedge \vec{v}(M)_{/R'} \tag{15}$$

avec les composantes exprimées dans (O'xyz)

$$\vec{\gamma}(M)_{/R'} : \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ \frac{d^2y}{dt^2} \\ \frac{d^2z}{dt^2} \end{pmatrix} \qquad \vec{g} : \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix}$$

$$\vec{T} = -T\ \frac{\vec{SM}}{|SM|} = -T\ \frac{\vec{SM}}{l} : \begin{pmatrix} -\frac{T}{l}x \\ -\frac{T}{l}y \\ -\frac{T}{l}(z-l) \end{pmatrix}$$

$$\vec{\omega} : \begin{pmatrix} 0 \\ \omega \cos \lambda \\ \omega \sin \lambda \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(M)_{/R'} : \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}$$

La relation (15) projetée nous donne les trois équations différentielles du mouvement suivantes :

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{Tx}{ml} - 2\omega\left(\frac{dz}{dt}\cos\lambda - \frac{dy}{dt}\sin\lambda\right) \qquad (15'a)$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{Ty}{ml} - 2\omega\frac{dx}{dt}\sin\lambda \qquad (15'b)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -g - \frac{T}{ml}(z - l) + 2\omega\frac{dx}{dt}\cos\lambda \qquad (15'c)$$

Si nous nous plaçons dans le cas des oscillations lentes et de faible amplitude, on peut faire les approximations suivantes :

$$z << l, \ \frac{dz}{dt} \approx 0 \quad \text{et} \quad \frac{d^2z}{dt^2} \approx 0$$

l'équation (15'c) s'écrit alors :

$$-g + \frac{T}{m} + 2\omega\cos\lambda\frac{dx}{dt} = 0$$

Le dernier terme de l'équation précédente est en général négligé devant g et nous avons alors :

$$T \approx m\,g$$

et en remplaçant dans 15'a et 15'b nous obtenons le système :

$$\left.\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= -\frac{gx}{l} + 2\omega\sin\lambda\frac{dy}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} &= -\frac{gy}{l} - 2\omega\sin\lambda\frac{dx}{dt} \end{aligned}\right. \qquad (16)$$

La résolution de ce système d'équations (voir remarque ci-après) se fait en introduisant la variable complexe Z(t) = x(t) + i y(t) et on démontre que la trajectoire de M dans le plan (Ox,Oy) est un ellipse applatie durant l'oscillation du pendule. Les axes de l'ellipse tournent alors avec la vitesse $\Omega = \omega|\sin\lambda|$ dans le sens de rotation Est → Sud et Ouest → Nord dans l'hémisphère Nord (voir figure XII.9) tandis que dans l'hémisphère Sud la rotation se fait dans le sens Est → Nord et Ouest → Sud.

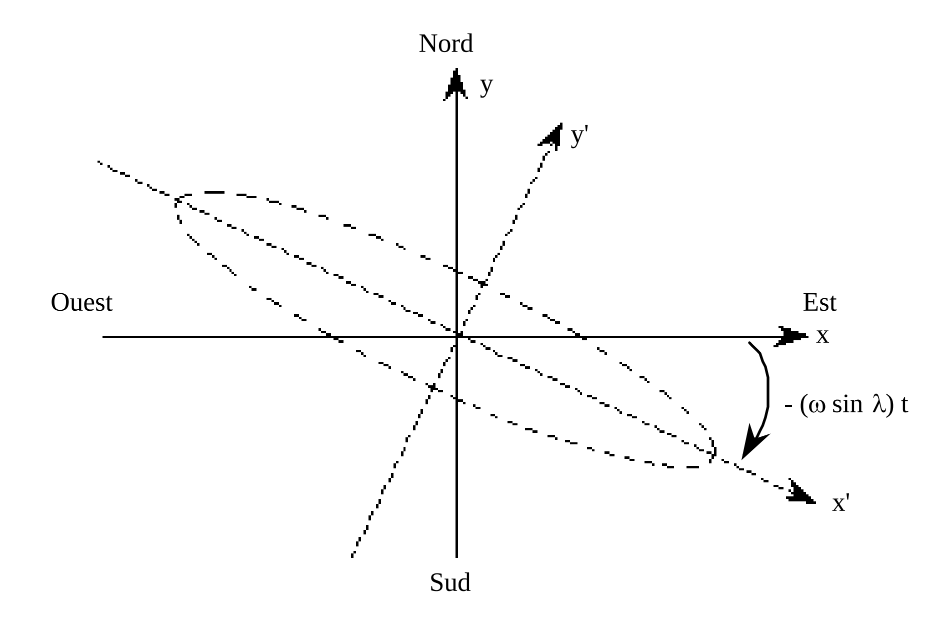


Fig. XII.9

La figure XII.10 représente avec plus de détail la trajectoire décrite par le pendule de Foucault au cours de ses oscillations par rapport au référentiel terrestre; l'infléchissement vers la droite de la trajectoire (A → B), (B → C) etc, dû à la force de Coriolis à été volontairement exagéré sur la figure.

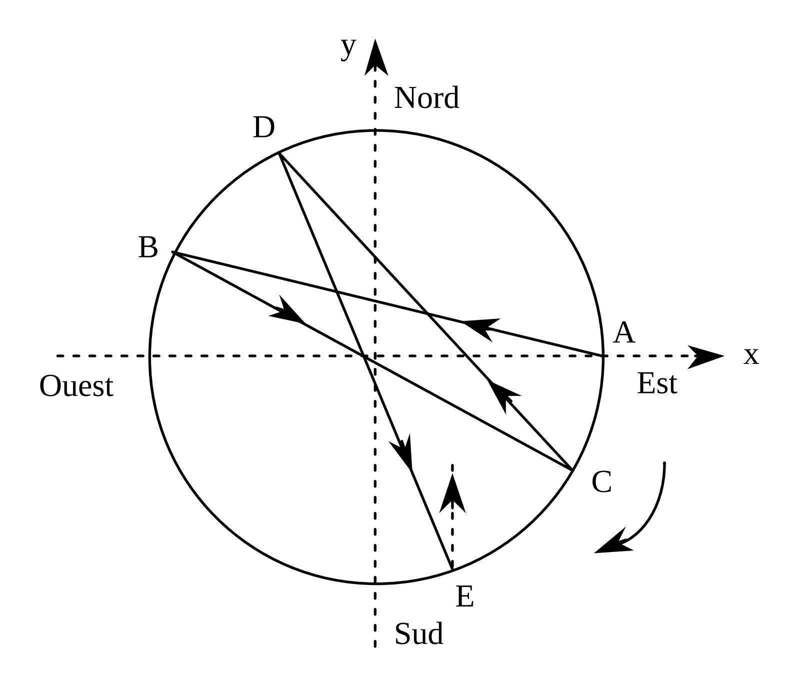


Fig. XII.10

La période de rotation T du plan, c'est-à-dire un tour complet de l'éllipse est :

$$T = \frac{2\pi}{|\Omega|} = \frac{2\pi}{\omega\,|\sin\lambda|} = \frac{T_0}{|\sin\lambda|}$$

avec $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega}$ durée de la rotation de la Terre .

Ainsi pour la latitude $\lambda = 47°$ et $T_0 = 86164$ s, on trouve T = 32H 5O mn.

Remarque :

* Comme nous l'avons annoncé précédemment on peut montrer que la trajectoire de M dans le plan (Ox,Oy) est une ellipse pendant une oscillation du pendule. En effet, reprenons les équations (16) en posant $\omega_0^2 = \dfrac{g}{l}$:

$$\frac{d^2x}{dt^2} - 2\omega \frac{dy}{dt} \sin\lambda - \omega_0^2\, x = 0$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\omega \frac{dx}{dt} \sin\lambda + \omega_0^2\, y = 0$$

Soit le nombre complxe Z = x + iy; les équations différentielles précédentes peuvent être regroupées en introduisant Z, sous la forme :

$$\frac{d^2Z}{dt^2} + 2\, i\, \omega \sin\lambda \frac{dZ}{dt} + \omega_0^2\, Z = 0 \qquad (17)$$

Le discriminant réduit de l'équation caractéristique associée à cette équation différentielle est :

$$\Delta' = -\,\omega^2 \sin^2\lambda - \omega_0^2 \ \text{Ÿ}\ \omega_0^2 \qquad (\text{car } -\,\omega^2 \sin^2\lambda \ \text{Ÿ}\ 3.10^{-8}\, \omega_0^2\,)$$

La solution de (17) est donc :

$$Z(t) = [\exp - (i\,\omega \sin\lambda)t]\,[A \cos \omega_0 t)) + B \sin \omega_0 t] \qquad (18)$$

Supposons qu'à l'instant t = 0 le point M est à la position x = a et y = 0 et sa vitesse initiale est nulle $\dfrac{dx}{dt} = 0$ et $\dfrac{dy}{dt} = 0$; nous pouvons donc déduire alors de ces conditions initiales les constantes A et B à partir des équations :

$$A + B = a$$
$$-\, i\,(\omega \sin\lambda)\, A + B\, \omega_0 = 0$$

d'où :

$$A = a$$
$$B = \frac{i\, a\, \omega}{\omega_0} \sin\lambda$$

et dans l'expression (18) nous obtenons :

$$Z(t) = [\exp - (i\,\omega \sin\lambda)t]\,[\cos\omega_0 t + \frac{i\,\omega}{\omega_0}\sin\lambda\sin\omega_0 t]$$

que l'on peut écrire sous la forme :

$$Z(t) = Z'(t)\exp - i\,\Omega t$$

avec :

$$\Omega = \omega\sin\lambda \quad \text{et} \quad Z'(t) = \cos\omega_0 t + \frac{i\,\omega}{\omega_0}\sin\lambda\sin\omega_0 t$$

Si nous posons $Z'(t) = x'(t) + i\,y'(t)$, nous avons par identification des deux formes de $Z'(t)$:

$$x'(t) = a\cos\omega_0 t$$

$$y'(t) = a\frac{\omega}{\omega_0}\sin\lambda\sin\omega_0 t = a\frac{\Omega}{\omega_0}\sin\omega_0 t$$

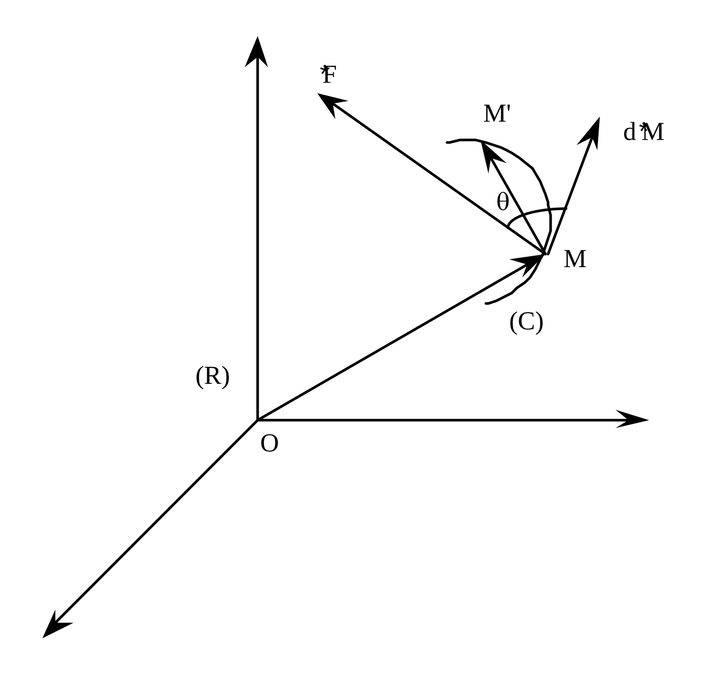
Ce sont les équations paramétriques d'une ellipse de demi axes a et $\frac{a\,\Omega}{\omega_0}$; cette ellipse est donc très applatie du fait que $\Omega << \omega_0$ (figure XII.9).

Notons que la relation $Z(t) = Z'(t)\exp - i\,\Omega t$ entre $Z(t)$ et $Z'(t)$ représentant le vecteur $\vec{OM}$ dans la base (Oxy) et dans la base (Ox'y') qui tourne par rapport à la précédente avec une vitesse angulaire $-\Omega$ autour de la vertical du lieu.

XIV- Travail et Puissance d'une force.

1- Travail élémentaire

Considérons un point matériel M repéré , à l'instant t, par le vecteur position $\vec{OM}$ dans un référentiel (R). Ce point matériel est en mouvement sur une trajectoire (C) sous l'action d'une force $\vec{F}$. Pendant un temps court Δt, le point matériel M décrit l'arc $\overline{MM'}$ que l'on peut assimiler à la corde MM'. Le déplacement du point matériel pendant l'intervalle de temps Δt est donc rectiligne et s'écrit $\vec{MM'} = \Delta\vec{M}$. Pour un intervalle de temps infinitésimal dt, $\Delta\vec{M}$ a pour limite le déplacement infinitésimal $d\vec{M}$ porté par la tangente à la trajectoire au point M .



Le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ pour le déplacement $d\vec{M}$ est défini par le produit scalaire de la force par le déplacement :

$$\delta w = \vec{F} \cdot d\vec{M} = |F| \; |dM| \cos\theta$$

Nous avons considéré que la force est constante en grandeur, direction et sens au cours du déplacement élémentaire $d\vec{M}$.

Dans un repère cartésien où les composantes de $\vec{F}$ sont F_x, F_y, F_z et celles de $d\vec{M}$ sont dx, dy, dz, on a :

$$\delta w = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

δ indique que dw est à priori une forme différentielle non intégrable, et donc n'est pas la différentielle totale exacte d'une fonction.

Remarques :

* Le travail élémentaire d'une force est dit virtuel si le déplacement $d\vec{M}$ est en dehors de la trajectoire.

* Si le mouvement du point matériel résulte de l'action de plusieurs forces $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$, ... $\vec{F}_i$ .. $\vec{F}_n$ de résultante $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i$ alors le travail de $\vec{F}$ s'écrit :

$$\delta w = \vec{F}.\, d\vec{M} = \sum_i \vec{F}_i.d\vec{M} = \sum_i \vec{F}_i.d\vec{M} = \sum_i \delta w_i$$

*Le travail de la résultante est donc égal à la somme algébrique des travaux effectués par chaque force pour le même déplacement.

- Le travail est résistant si $\delta w = \vec{F}.\, d\vec{M} = |F|\ |dM|\ \cos\theta < 0$ c'est à dire pour $\theta > \frac{\pi}{2}$.
- Le travail est moteur si $\delta w = \vec{F}.\, d\vec{M} = |F|\ |dM|\ \cos\theta > 0$ c'est à dire pour $\theta < \frac{\pi}{2}$.
- Si la force est perpendiculaire au déplacement, le travail élémentaire est nul $\theta = \frac{\pi}{2}$; c'est le cas par exemple de la force de Coriolis $\vec{F}_C = -2m\,(\vec{\omega} \wedge \vec{v})$ ou de la force de Lorentz $\vec{F} = (q\ \vec{v} \wedge \vec{B})$.

2- Travail le long d'une trajectoire curviligne

Supposons que le point matériel M se trouve en A à la date t_1 et se trouve en B à t_2. Le travail d'une force $\vec{F}$ au cours du déplacement entre A et B le long de la trajectoire (C) est donné par l'intégrale curviligne

$$W_A^B = \int_{\overline{AB}} \vec{F}.d\vec{M}$$

étendue à l'arc de trajectoire $\overline{AB}$ décrit entre les instants t_1 et t_2. En remarquant que $d\vec{M} = \vec{v} \, . \, dt$, nous pouvons écrire le travail de la force $\vec{F}$ entre t_1 et t_2 sous la forme :

$$W_A^B = \int \vec{F}.\vec{v} \, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}.\vec{v} \, dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_t.\vec{v} \, dt$$

où $\vec{F}_t$ désigne la composante tangentielle de la force. Le travail de la composante $\vec{F}_n$
de la force suivant la normale principale est nulle ($\vec{F}_n.\vec{v} = 0$) .

3 - Puissance d'une force

La puissance d'une force $\vec{F}$ est le travail élémentaire effectué par cette force par unité de temps :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \, . \, \vec{v}(M)_{/R} = \vec{F} \frac{d\vec{M}}{dt} = \frac{dW}{dt} \qquad (1)$$

La puissance caractérise la vitesse avec laquelle le travail de $\vec{F}$ est effectué. Il est essentiel de remarquer que cette définition n'a de sens que si on indique le point matériel auquel est appliquée la force $\vec{F}$ et le référentiel (R) par rapport auquel on définit $\vec{v} = \vec{v}(M)_{/R}$.

par conséquent la puissance dépend du référentiel.

4 - Unités de travail et de puissance

L'équation aux dimensions relative au travail est :

$$[W] = [F][L]$$
$$=[M][L]^2[T]^{-2}$$

et l'équation aux dimensions relative à la puissance compte tenu de (1) est :

$$[P] = [M][L]^2[T]^{-3}$$

Dans le système MKSA, l'unité de travail est le Joule et l'unité de puissance est le Watt.

1 Joule = 1 Newton . mètre

Dans le système CGS, l'unité de travail est l'erg et l'unité de puissance est

1 Watt = 1 Joule/seconde

l'erg/seconde

1 erg = 1 dyne . cm

La relation entre ces unités est :

1 Joule = 1 Newton ; 1 mètre = 10^5 dynes ; 10^2 cm = 10^7 ergs

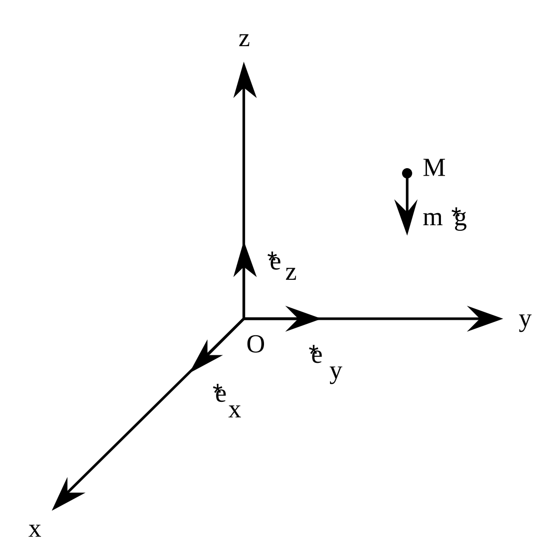
et 1 Watt = 10^7erg/seconde.

5- Puissance dans le cas des forces particulières

a- Puissance du poids d'un point matériel

Considérons un point matériel M de masse m placé dans le champ de pesanteur g . Le poids de ce point matériel dans un référentiel R (Oxyz) (voir figure XIV.1) s'écrit :

$$\vec{P} = - mg\,\vec{e}_z$$



La puissance $\mathcal{P}$ du poids $\vec{P}$ est :

$$\mathcal{P} = \vec{P} \,.\, \vec{v}(M)_{/R}$$

par ailleurs la vitesse s'écrit en coordonnées cartésiennes sous la forme :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \frac{dx}{dt}\vec{e}_x + \frac{dy}{dt}\vec{e}_y + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z$$

En portant dans l'expression de la puissance on obtient :

$$\mathcal{P} = -mg\frac{dz}{dt}$$

Remarque :

* Si le déplacement du point matériel est perpendiculaire au poids, c'est-à-dire si la composante de la vitesse suivant $\vec{e}_z$ est nulle, alors la puissance est nulle. En effet $\frac{dz}{dt} = 0$ implique $\mathcal{P}=0$

b- Puissance d'une force centrale

La force centrale est toujours portée par le vecteur position $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$. Elle passe donc constamment par le point O appelé centre du mouvement, elle s'écrit en coordonnées polaires sous la forme : $\vec{F} = F_r\ \vec{e}_r$ et la puissance de cette force est alors :

$$\mathcal{P} = \vec{F}.\ \vec{v}(M)_{/R} = F_r\ \vec{e}_r\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\vec{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\vec{e}_z\right)$$

$$= F_r\frac{dr}{dt}$$

XV- Théorème de la puissance -Théorème de l'énergie cinétique.

1- Définition de l'énergie cinétique

Soit M un point matériel de masse m et de vitesse $\vec{v}(M)_{/R}$ par rapport à un référentiel (R). L'énergie cinétique de ce point matériel est définie par :

$$E_c(M)_{/R} = \frac{1}{2}m\ v^2(M)_{/R}$$

En utilisant la quantité de mouvement $\vec{p}(M)_{/R}$, on peut écrire l'énergie cinétique sous la forme $\vec{v}(M)_{/R}$:

$$E_c(M)_{/R} = \frac{1}{2}\frac{\vec{p}^2(M)_{/R}}{m}$$

On remarque que cette définition tient compte du référentiel (R) par rapport auquel on définit la vitesse $\vec{v}(M)_{/R}$.

2- Théorème de la puissance

La dérivée par rapport au temps de l'énergie cinétique d'un point matériel relative à un référentiel R est égale à la puissance de toutes les forces appliquées sur ce point :

$$\mathcal{P}_{/R} = \frac{dE_{c/R}}{dt}$$

En effet, d'après le principe fondamental de la dynamique (X-2)

$$\vec{F} = \frac{d}{dt}\vec{p}(M)_{/R}$$

on a :

$$\vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/R} = \frac{d}{dt}\vec{p}(M)_{/R} \cdot \vec{v}(M)_{/R}$$

En utilisant la définition de la puissance et en considérant que la masse du point matériel est constante, nous obtenons :

$$\mathcal{P}_{/R} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/R} = m\frac{d}{dt}\vec{v}(M)_{/R} \cdot \vec{v}(M)_{/R}$$
$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}^2(M)_{/R}\right)$$

qui s'écrit :

$$\mathcal{P}_{/R} = \frac{dE_{c/R}}{dt}$$

Remarques :

* Si le référentiel est non galiléen, il faudra ajouter la puissance de la force d'inertie d'entraînement. La puissance de la force d'inertie de Coriolis est nulle.

* Si le point matériel est isolé, alors son énergie cinétique est constante $E_{c/R}$ = cte. En effet, si le point matériel est isolé, alors la résultante des forces qui lui sont appliquées est nulle.

$$\vec{F} = \vec{0}$$

par conséquent la puissance est nulle :

$$\mathcal{P}_{/R} = \vec{F} \cdot \vec{v}(M)_{/R} = \vec{0}$$

et à partir du théorème de la puissance on déduit que :

$$\frac{dE_{c/R}}{dt}$$

d'où : $E_c(M)_{/R}$ = cte

* A partir de la relation (1) :

$$\mathcal{P}_{/R} = \vec{F} \,.\, \vec{v}(M)_{/R} = m \frac{d}{dt}\vec{v}(M)_{/R} \,.\, \vec{v}(M)_{/R}$$

on constate que :

- Si le mouvement est accéléré alors $\mathcal{P}_{/R} = \frac{dE_{c/R}}{dt} > 0$ donc l'énergie cinétique est une fonction croissante.
- Si le mouvement est retardé alors $\mathcal{P}_{/R} = \frac{dE_{c/R}}{dt} < 0$ donc l'énergie cinétique est une fonction décroissante.

3- Théorème de l'énergie cinétique

La variation de l'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants t_A et t_B est égale au travail de toutes les forces appliquées sur le point matériel au cours de son mouvement :

$$W_B^A = E_{c/R}(B) - E_{c/R}(A)$$

En effet, le travail d'une force $\vec{F}$ entre deux points A et B est donné par l'intégrale :

$$W_B^A = \int_A^B \vec{F}.\vec{v}(M)_{/R} dt = \int \mathcal{P}_{/R}\, dt$$

En utilisant le théorème de la puissance :

$$\mathcal{P}_{/R} = \frac{dE_{c/R}}{dt}$$

On a :

$$W_B^A = \int_A^B \frac{dE_{c/R}}{dt}$$

d'où : $W_B^A = E_{c/R}(B) - E_{c/R}(A)$

Remarques :

* Le théorème de l'énergie cinétique est particulièrement adapté aux systèmes dont la position est définie par un seul paramètre, c'est-à-dire aux systèmes possèdant un degré de liberté, puisqu'il ne fournit qu'une seule équation scalaire.

* Le théorème de l'énergie cinétique est valable également quel que soit le référentiel - galiléen ou non galiléen - mais à condition de tenir compte de la force d'inertie d'entrainement dans le travail, le travail de la force de Coriolis étant nul.

* Dans le cas d'un système formé de plusieurs points matériels, il faut tenir compte des forces intérieures (d'interaction) et extérieures. En effet, bien que les forces intérieures s'équilibrent d'après le principe de l'action et de la réaction :

$$\vec{F}_{jk} = - \vec{F}_{kj}$$

la somme des travaux de ces forces d'interaction n'est pas nulle en général :

$\vec{F}_{jk} . d\vec{OM}_j \neq \vec{F}_{kj} . d\vec{OM}_k$

En effet, considérons un système formé de deux points matériels M_j et M_k sous l'action respectivement des forces $\vec{F}_{jk}$ et $\vec{F}_{kj}$

Le travail élémentaire de $\vec{F}_{jk}$ est : $dW_j = \vec{F}_{jk} . d\vec{OM}_j$

Le travail élémentaire de $\vec{F}_{kj}$ est : $dW_k = \vec{F}_{kj} . d\vec{OM}_k$

Le travail élémentaire total :

$$\begin{aligned} dW &= dW_j + dW_k \\ &= \vec{F}_{jk} . d\vec{OM}_j + \vec{F}_{kj} . d\vec{OM}_k \\ &= \vec{F}_{jk} .(d\vec{OM}_j - d\vec{OM}_k) \\ &= \vec{F}_{jk} .d \vec{M_k M_j} \end{aligned}$$

Le déplacement relatif $d\vec{M_k M_j}$ est non nul si le système n'est pas rigide; dans ce cas, le travail des forces intérieures est non nul.

XVI- Champ conservatif - Energie potentielle.

1- Champ de forces conservatif

Considérons un point matériel M soumis à l'action de la force

$$\vec{F} = F_x \vec{e}_x + F_y \vec{e}_y + F_z \vec{e}_z$$

Par définition, on dit que la force $\vec{F}$ dérive d'une fonction de force U(x,y,z), si les composantes du vecteur force sont les dérivées partielles de la fonction U par rapport à x,y,z :

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x} \qquad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} \qquad F_z = \frac{\partial U}{\partial z}$$

Le travail effectué par la force $\vec{F}$ au cours d'un déplacement élémentaire $d\vec{M}$ du point matériel M s'écrit :

$$dW = F_x\, dx + F_y\, dy + F_z\, dz$$

d'où : $$dW = \frac{\partial U}{\partial x}\, dx + \frac{\partial U}{\partial y}\, dy + \frac{\partial U}{\partial z}\, dz$$

On remarque que le travail élémentaire est la différentielle totale exacte de la fonction U(x,y,z)

$$dW = dU$$

avec : $$dU = \vec{F}.\ d\vec{M}$$

et donc : $$\vec{F} = \overrightarrow{grad}U$$

Le travail de la force conservative $\vec{F}$ effectué pour déplacer le point matériel M de la position $A(x_A,y_A,z_A)$ à la position $B(x_B,y_B,z_B)$ s'écrit :

$$W_A^B = U(x_B,y_B,z_B) - U(x_A,y_A,z_A)$$

Dans ce cas le travail pour aller de A à B ne dépend pas du chemin suivi. Il ne dépend que de la position initiale et finale de la particule. Il est inutile de connaître le mouvement et la trajectoire de la particule (voir figure XV.1).

$$W_A^B \int_{(AB)_1} \vec{F}.d\vec{M} = \int_{(AB)_2} \vec{F}.d\vec{M}$$

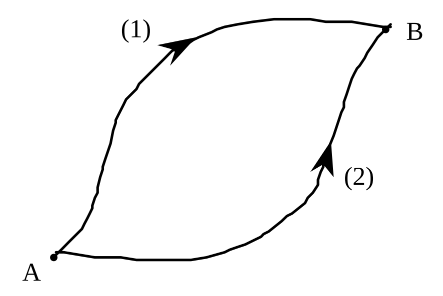


Fig. XV.1

2- Energie potentielle

Dans le cas particulier où le travail ne dépend que des positions initiale et finale , c'est-à-dire ne dépend ni de la façon dont le parcours est effectué au cours du temps, ni du parcours suivi, alors la force est conservative et dérive d'une énergie potentielle Ep.

Par définition la variation de l'énergie potentielle $\Delta Ep = Ep(B) - Ep(A)$ du champ de force $\vec{F}$ est égale à l'opposé du travail de la force $\vec{F}$ entre A et B.

$$\Delta Ep = Ep(B) - Ep(A) = - W_A^B = -\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{M}$$

par ailleurs :

$$\Delta Ep = Ep(B) - Ep(A) = \int_A^B dEp$$

d'où : $dEp = -\vec{F} \cdot d\vec{M}$

Le champ conservatif $\vec{F}$ dérive d'une énergie potentielle Ep

donc : $\vec{F} = -\ \overrightarrow{grad}E_p\ E_p$ (1)

Le signe "moins" dans l'expression (1) montre que le travail de $\vec{F}$ est une fonction décroissante de l'énergie potentielle.

Remarques :

* En général, l'énergie potentielle est nulle ($E_p = 0$) pour des corps en interaction et qui sont infiniment éloignés.

* L'énergie potentielle en un point M est définie à une constante additive près ; en effet, la variation élémentaire de l'énergie potentielle s'écrit :

$$dE_p = -\vec{F} \cdot d\vec{M}$$

sa variation entre les points A et M est :

$$\int_A^M dE_p = -\int_A^M \vec{F} \cdot d\vec{M}$$

donc : $$E_p(M) - E_p(A) = -\int_A^M \vec{F} \cdot d\vec{M}$$

d'où : $$E_p(M) = E_p(A) - \int_A^M \vec{F} \cdot d\vec{M}$$

Donc l'énergie potentielle en un point M est définie à une constante additive près, ($E_p(A)$ dans ce cas). Par exemple, si l'origine des énergies potentielles est choisie à l'infini.

$$E_p(A) = E_p(\infty) = 0$$

d'où : $$E_p(M) = -\int_\infty^M \vec{F} \cdot d\vec{M}$$

C'est-à-dire que l'énergie potentielle au point M est le travail qu'il faut fournir pour ramener ce point de l'infini à sa position, au cours d'un déplacement réversible.

* Dans le cas d'une force qui dérive d'un potentiel U qui dépend du temps, le travail élémentaire ne se confond plus avec la différentielle dU. En effet, si le potentiel U dépend des coordonnées et du temps également :

$$U = U(x,y,z,t)$$

alors la différentielle totale s'écrit :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x}\ dx + \frac{\partial U}{\partial y}\ dy + \frac{\partial U}{\partial z}\ dz + \frac{\partial U}{\partial t}\ dt$$

d'où : $$dU = \overrightarrow{gradU}\ d\overrightarrow{M}\ .\ + \frac{\partial U}{\partial t}\ dt$$

$$= \vec{F}.\ d\overrightarrow{M} + \frac{\partial U}{\partial t}\ dt$$

donc : $$dU = dW + \frac{\partial U}{\partial t}\ dt$$

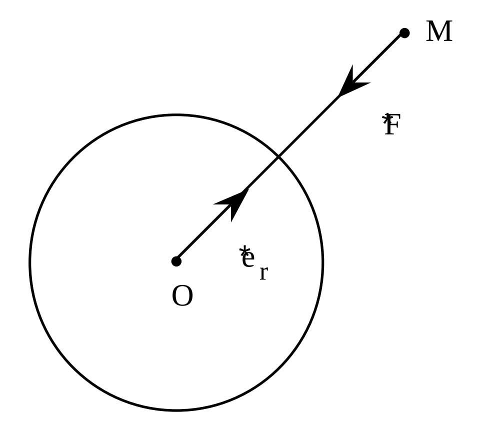
Donc le travail élémentaire ne se confond plus avec la différentielle dU.

3- Expression de l'énergie potentielle dans des cas particuliers

a- Cas d'un champ Newtonien

Considérons un point matériel M placé dans le champ d'une force Newtonienne $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e}_r$$



Le travail élémentaire de cette force est :

$$dW = \vec{F} \,.\, d\vec{M}$$

en coordonnées sphériques (r, θ, φ) le déplacement élémentaire s'écrit :

$$d\vec{M} = dr\ \vec{e}_r + r\ d\theta\ \vec{e}_\theta + r \sin\theta\ d\varphi\ \vec{e}_\varphi$$

d'où :

$$dW = -\frac{K}{r^2}\ dr$$

par ailleurs :

$$dW = -\ dE_p$$

donc :

$$dE_p = \frac{K}{r^2}\ dr$$

L'énergie potentielle au point M s'obtient par intégration :

$$E_p(M) = -\frac{K}{r^2} + cte$$

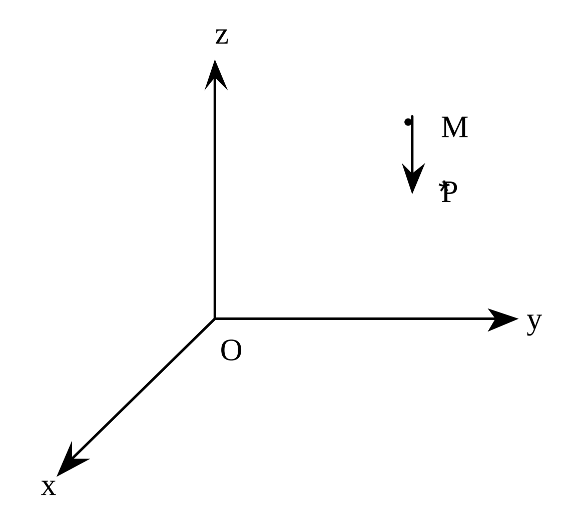
Si on considère que l'origine de l'énergie potentielle est à l'infini, $E_p(\infty) = 0$, alors la constante est nulle et l'énergie potentielle au point M s'écrit :

$$E_p(M) = -\frac{K}{r}$$

b- Energie potentielle de la pesanteur

Considérons un point matériel M de masse m soumis à l'action de son poids :

$$\vec{P} = m\,\vec{g} = -\,mg\;\vec{e}_z$$



Le travail élémentaire de P est :

$$dW = \vec{P}\,.\,d\vec{M}$$

d'où :

$$dW = -\,mg\,dz$$

Par ailleurs :

$$dW = -\,dE_p$$

donc :

$$E_p = mg\,z + cte$$

si l'origine de l'énergie potentielle est à l'altitude zéro ($E_p = 0$ pour $z = 0$), alors :

$$E_p = mg\,z$$

On remarque que le signe de l'énergie potentielle dépend de l'orientation de l'axe des z.

c- Relation entre l'énergie potentielle de la pesanteur et l'énergie potentielle du champ Newtonien

A la surface de la terre la force de gravition s'écrit :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e}_r$$

où R est le rayon de la terre supposée sphérique.

Si le point matériel est situé à l'altitude z de la surface de la Terre son énergie potentielle est :

$$E_p(M) = -\frac{K}{R + z}$$

d'où :

$$E_p(M) = -\frac{K}{R}\,\frac{1}{1 + z/R}$$

On considère que le point matériel se trouve à faible altitude alors le rapport $\frac{z}{R}$ est très petit et il est raisonnable de faire le développement suivant :

$$\frac{1}{1+\frac{z}{r}} = 1 - \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \ldots$$

donc :

$$E_p(M) = -\frac{K}{R}\left[1 - \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \ldots\right]$$

Par ailleurs le champ de pesanteur s'écrit :

$$g = \frac{K}{m\,R^2}$$

d'où :

$$E_p(M) = -\,m\,g\,R\left[1 - \frac{z}{R} + \left(\frac{z}{R}\right)^2 - \ldots\right]$$

En négligeant les termes infiniment petits du 2ème ordre ou d'un ordre supérieur on a :

$$E_p(M) = m\,g\,z - m\,g\,R$$

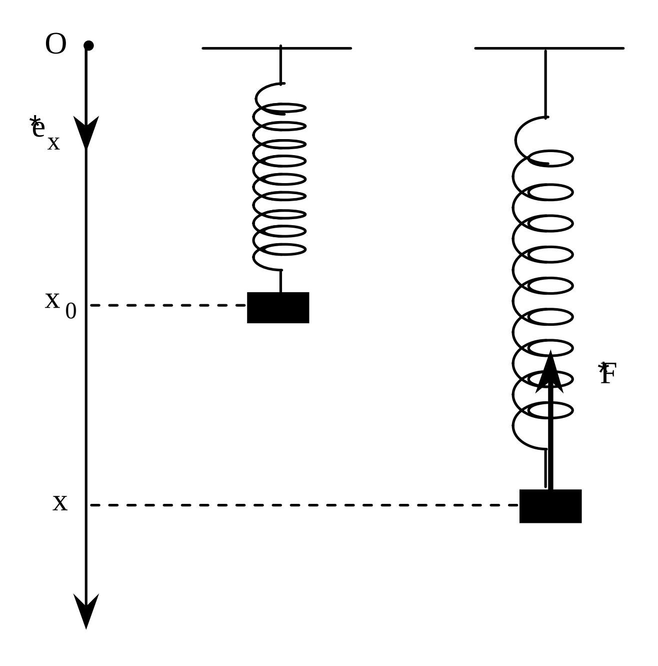
d- Energie potentielle de la force de rappel d'un ressort

Considérons un point matériel de masse m attaché à un ressort de constante de raideur K .
Lorsque ce point matériel est écarté de sa position d'équilibre x_0, il sera soumis à une force de rappel :

$$\vec{F} = -\,K\,(x - x_0)\;\vec{e}_x$$

on pose : $X = x - x_0$

d'où : $\vec{F} = -\,K\,X\;\vec{e}_x$



Le travail élémentaire de cette force de rappel est :

$$dW = \; = \vec{F} \,.\, d\vec{M}$$

$$= - K\, X\, dX$$

Par ailleurs :

$$dW = - dE_p$$

donc : $E_p = K \dfrac{X^2}{2} + cte$

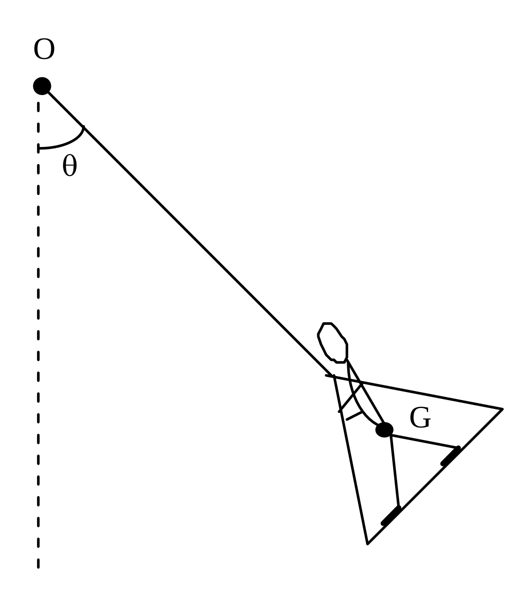
Si on prend pour origine de l'énergie potentielle la position d'équilibre ($E_p = 0$ pour x = 0), alors :

$$E_p = K \frac{X^2}{2}$$

On dit que la force de rappel - K X dérive de l'énergie potentielle $E_p = K \dfrac{X^2}{2}$

e- Cas où l'énergie potentielle dépend du temps

Considérons un "pendule pesant" constitué d'un enfant sur une balançoire, et soit G le centre de gravité du système. Ce pendule est assimilable à un pendule simple de longueur l = OG et de masse m.



L'énergie potentielle du système est :

$$E_p = m\,g\,l\,(1 - \cos\theta)$$

où l'origine de l'énergie potentielle est à l'équilibre ($\theta = 0$). Supposons qu'au cours du mouvement l'enfant change de position, par conséquent le centre de gravité se déplace et la longueur l est alors une fonction du temps. Dans ce cas la différentielle totale de l'énergie potentielle s'écrit :

$$dE_p = -\,dW + \frac{\partial E_p}{\partial t}\,dt$$

C'est-à-dire que le travail élémentaire ne se confond plus avec la différentielle $-dE_p$.

f - Energie potentielle d'interaction de deux atomes d'une molécule (liaison ionique)

Considérons une molécule diatomique formée de deux atomes A et B. L'atome B est supposé en mouvement par rapport à l'atome A, on pose AB = r.
Supposons que B est soumis à l'action de deux forces, l'une attractive et l'autre répulsive.

- La force coulombienne attractive (charges opposées) :

$$\vec{F}_1 = -\frac{k_1}{r^2}\vec{e}_r \qquad k_1 > 0$$

- La force répulsive due au principe d'exclusion de Pauli selon lequel deux électrons ne peuvent occuper les mêmes états quantiques :

$$\vec{F}_2 = -\frac{k_2}{r^3}\vec{e}_r \qquad k_2 > 0$$

Ces deux forces dérivent chacune d'une énergie potentielle :

$$E_{p_1}(r) = -\frac{k_1}{r}$$

et $$E_{p_2}(r) = \frac{1}{2}\frac{k_2}{r^2}$$

L'énergie potentielle totale s'écrit :

$$E_p(r) = E_{p_1}(r) + E_{p_2}(r)$$

$$= -\frac{k_1}{r} + \frac{1}{2}\frac{k_2}{r^2}$$

sa représentation graphique en fonction de la distance est :

Remarque :

* La condition nécéssaire pour que B soit en équilibre est

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

d'où :

$$-\frac{k_1}{r} + \frac{k_2}{r^3} = 0$$

donc la position d'équilibre est à :

$$r_0 = \frac{k_2}{k_1}$$

et la vitesse de B en ce point est nulle

$v = 0$

XVII - Energie Mécanique - Théorème de conservation.

1- Définition

Un point matériel M est caractérisé à chaque instant t par son énergie cinétique $E_c(M)$ et son énergie potentielle $E_p(M)$. L'énergie mécanique du point M est la somme de ces énergies :

$$E(M) = E_c(M) + E_p(M)$$

2- Théorème de conservation de l'énergie mécanique

L'énergie mécanique E(M) d'un point matériel M dans un champ de forces conservatif est constante au cours du mouvement (c'est la conservation de l'énergie mécanique) :

$$E(M) = E_c(M) + E_p(M) = cte$$

En effet, d'après le théorème de l'énergie cinétique, la variation de l'énergie cinétique d'un point matériel est égale au travail de la force appliquée à ce point :

$$dE_c = \delta W$$

si le point matériel est placé dans un champ de forces conservatif, alors le travail de cette force conservative est égal à l'opposé de la variation de l'énergie potentielle :

$$\delta W = - dE_p$$

Les deux relations précédentes on déduit :

$$d(E_c + E_p) = 0$$

d'où :

$$E_c + E_p = cte$$

donc :

$$E(M) = cte$$

Cette constante est déterminée par les conditions initiales du mouvement. Si par exemple à l'instant initial $t = t_0$ le point matériel est en $M = M_0$ et sa vitesse est $v = v_0$, alors la constante est donnée par :

$$cte = E_c(M_0) + E_p(M_0)$$

Remarque :

* L'énergie mécanique est une intégrale première des équations du mouvement car elle ne fait intervenir que les dérivées premières des coordonnées par rapport au temps (alors que la loi de Newton ou le théorème de l'énergie cinétique fait intervenir la dérivée seconde).

$$E(M) = \frac{1}{2} m \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] + E_p(M) = cte$$

De manière générale on appelle intégrale première d'une grandeur (énergie par exemple) qui se conserve, l'équation de conservation ne faisant intervenir que les dérivées premières des coordonnées par rapport au temps (équation différentielle du premier ordre).

3- Cas des forces appliquées pas toutes conservatives

Dans ce cas il n'y a plus conservation de l'énergie mécanique. En effet, considérons que le point matériel est soumis à deux forces :

- $\vec{F_1}$ force conservative qui dérive d'une énergie potentielle E_p

$$dE_p = - \vec{F_1} . \vec{dM} = - (dW)_{F_1}$$

- $\vec{F_2}$ force non conservative.

D'après le théorème de l'énergie cinétique : la variation de l'énergie cinétique est égale au travail de toutes les forces :

$$dE_c = (dW)_{F1} + (dW)_{F2}$$

d'où :

$$dE_c = - dE_p + (dW)_{F2}$$

donc :

$$d(E_c + E_p) = (dW)_{F2}$$

La variation élémentaire de l'énergie mécanique est donc égale au travail élémentaire des forces non conseratives qui s'appliquent à M :

$$dE = (dW)_{F2}$$

La variation de l'énergie mécanique entre deux points A et B s'écrit :

$$E(B) - E(A) = [W_{F2}]_A^B \qquad (1)$$

Donc lors d'un déplacement entre deux points A et B, la variation de l'énergie mécanique est égale à la somme algébrique des travaux de toutes les forces non conservatives (dissipatives) qui s'éxercent sur le point matériel entre A et B.

Exemple :

Considérons un mobile M qui glisse avec frottement le long d'une pente. Ce mobile est abandonné à l'instant $t_i = 0$ sans vitesse initiale du haut de

la pente ($z_A = h$). A l'instant t_f le mobile arrive au bas de la pente ($z_B = 0$). En un point M entre A et B



L'énergie cinétique s'écrit :

$$E_c\,(M) = \frac{1}{2}\ mv^2$$

et l'énergie potentielle :

$$E_p(M) = m\ g\ z$$

au point A la vitesse est nulle d'où :

$$E_c\,(A) = 0$$

et l'énergie mécanique est sous forme d'énergie potentielle

$$E(A) = m\ g\ h$$

alors qu'au point B c'est l'énergie potentielle qui est nulle

$$E_p(B) = 0$$

et l'énergie mécanique est sous forme d'énergie cinétique :

$$E(B) = \frac{1}{2}\, m v_B^2$$

En appliquant la relation (1) on a :

$$\frac{1}{2}\, m v_B^2 - m\, g\, h = W_A^B$$

Le deuxième membre représente le travail des forces de frottement entre A et B, c'est l'énergie dissipée par frottement entre A et B.

XVIII- Equilibre et stabilité d'un point matériel dans un champ conservatif.

1- Position du Problème

Soit M un point matériel dans un champ de forces conservatif :

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ E_p$$

Chercher une position d'équilibre stable revient à étudier si le point matériel M lâché sans vitesse initiale ne va pas évoluer de lui même vers une autre position à laquelle il va se stabiliser (après une oscillation autour de cette position). Comme les forces sont conservatives, l'énergie mécanique est alors conservée :

$$E = E_c + E_p = cte$$

Si on considère qu'à l'état initial le point matériel est au repos, alors $E_c = 0$ et au cours de l'évolution du point son énergie cinétique croît et son énergie potentielle décroît. L'état final correspond à une position d'équilibre stable qui correspond à un minimum local de l'énergie potentielle.

2- Condition d'équilibre sur l'énergie potentielle

Soit M un point matériel soumis à la force conservative $\vec{F}$:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}\ E_p$$

et

$$dE_p = -\vec{F} \cdot \overrightarrow{dM}$$

dans le système de Serret-Frénet et en faisant intervenir l'abscisse curviligne

$$\overrightarrow{dM} = ds\,\vec{\tau}$$

donc :

$$dEp = -\vec{F}\,\vec{\tau}\ ds$$

d'où :

$$\frac{dEp}{ds} = -\vec{F} \cdot \vec{\tau}$$

C'est-à-dire que la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à l'abscisse curviligne est égale à l'opposée de la composante tangentielle de la force conservative $\vec{F}$. Supposons que le point matériel M est en équilibre dans un référentiel (R). La condition d'équilibre appliquée sur toutes les forces $\vec{F_i}$ est :

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F_i} = 0$$

Si $M_0 = M(s_0)$ est la position d'équilibre alors :

$$\left(\frac{dEp}{ds}\right)_{s_0} = -\vec{F} \cdot \vec{\tau} = 0$$

donc la condition d'équilibre en un point $M_0 = M(s_0)$ est :

$$\left(\frac{dEp}{ds}\right)_{s_0} = 0$$

cet équilibre est stable si :

$$\left(\frac{d^2Ep}{ds^2}\right)_{s_0} > 0$$

Nous avons alors le cas de la figure XVIII.1 :

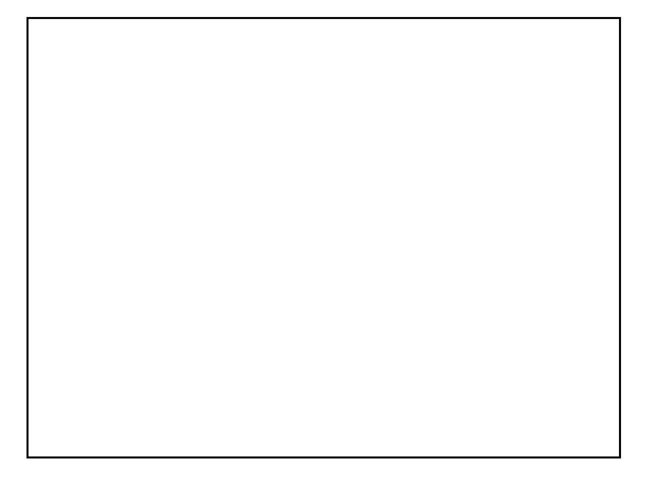


Fig. XVIII.1

un écart par rapport à s_0 implique de petits mouvements sinusoïdaux dits mouvements harmoniques.

L'équilibre est instable si :

$$\left(\frac{d^2Ep}{ds^2}\right)_{s_0} < 0$$

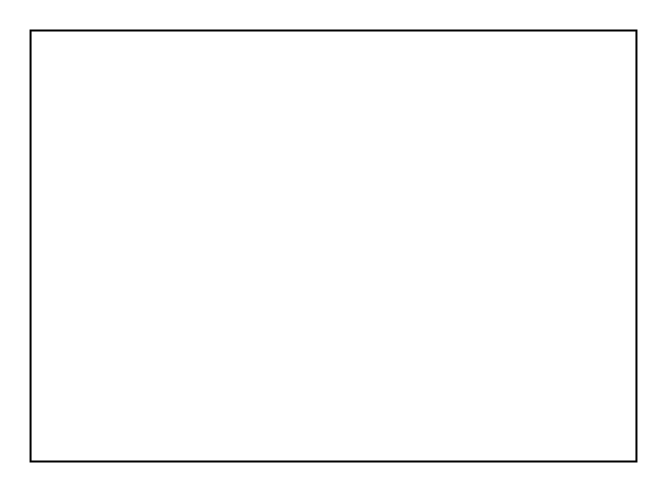


Fig. XVIII.2

Un écart par rapport au point d'équilibre s_0 est amplifié et le point évolue vers une autre position, éventuellement d'équilibre plus stable si elle existe.
Le raisonnement fait avec l'abscisse curviligne s peut être fait avec une autre coordonnée quelconque q qui caractérise la fonction du point M. La condition d'équilibre sur l'énergie potentielle est dans ce cas :

$$\frac{dEp}{dq} = 0$$

Pour l'équilibre stable :

$$\frac{d^2Ep}{dq^2} > 0$$

pour l'équilibre instable :

$$\frac{d^2Ep}{dq^2} < 0$$

si $\frac{d^2Ep}{dq^2} = 0$ l'équilibre est dit "indifférent".

3- Exemple : Application au cas d'un système de particules

Soit un système de n particules A_i, de masse m_i, placées en des points de côte z_i. L'énergie potentielle du système s'écrit sous la forme :

$$E_p = \sum_{i=1}^{n} m_i\, g\, z_i + E_p(0)$$

Soit M la masse du système et z la côte du centre de masse. L'énergie potentielle s'écrit :

$$E_p = M\, g\, z + E_p(0)$$

Le minimum de E_p correspond au minimum de z d'où l'énoncé du principe de **Toricelli** :
L'équilibre d'un système pesant est stable lorsque son centre de masse est le plus bas possible.

XIX- Etude qualitative d'un système conservatif particulier - Etat lié - Etat de diffusion.

1- Equation du mouvement

Soit un point matériel M de masse m en mouvement sur une courbe plane (C), sans frottement et sous l'action d'une force qui dérive d'un potentiel $\vec{F} = -\vec{grad}\ E_p$.
Comme il n'y a pas de frottement la réaction de la courbe est normale à la trajectoire :

$$\vec{R} = \vec{R}_N$$

Appliquons le principe fondamental de la dynamique dans un référentiel galiléen (R_G) :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt}(M)_{/R_G} = \vec{F} + \vec{R}$$

L'accélération s'écrit dans le système d'axes de Serret - Frénet sous la forme :

$$\vec{\gamma}(M)_{/R_G} = \frac{d}{dt}\vec{v}(M)_{/R_G} = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\vec{n}$$

où ρ désigne le rayon de courbure de la trajectoire (C) au point M .

La projection de la relation fondamentale suivant la tangente donne :

$$m\vec{\gamma} \cdot \vec{\tau} = \vec{F} \cdot \vec{\tau}$$

$$m\frac{d}{dt}\vec{v}(M)_{/R_G} = \vec{F} \cdot \vec{\tau} \qquad (2)$$

Comme $\vec{F}$ dérive d'un potentiel E_p alors :

$$dE_p = \overrightarrow{grad}\ E_p \cdot \overrightarrow{dM}$$

$$dE_p = -\vec{F} \cdot \overrightarrow{dM}$$

par ailleurs :

$$\overrightarrow{dM} = ds\,\vec{\tau}$$

d'où :

$$dE_p = \vec{F} \cdot \vec{\tau}\ ds$$

donc :

$$\frac{dE_p}{ds} = -\vec{F} \cdot \vec{\tau}$$

ce qui veut dire que la dérivée de l'énergie potentielle par rapport à l'abscisse curviligne est l'opposée de la composante tangentielle de $\vec{F}$.

En multipliant les deux membres de la relation (2) par $\vec{v} = \frac{ds}{dt}$; on obtient :

$$m\vec{v}\,\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{dE_p}{ds}\frac{ds}{dt}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2\right) = -\frac{dE_p}{dt}$$

donc :

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\,m\,v^2 + E_p\right) = 0$$

L'intégration de cette équation différentielle donne :

$$\frac{1}{2}\,m\,v^2 + E_p(s) = cte = E_0$$

La constante est déterminée par les conditions initiales. On retrouve ainsi l'intégrale première de l'énergie comme équation du mouvement .

Remarque :

* L'expression de la réaction est déduite de la projection de la relation fondamentale suivant la normale à la courbe :

$$m\vec{\gamma}\,.\,\vec{n} = \vec{F}\,.\,\vec{n} + \vec{R}\,.\,\vec{n}$$

donc :

$$\frac{v^2}{\rho} = \vec{F} \cdot \vec{n} + R_N$$

d'où l'expression de la réaction :

$$R_N = \frac{v^2}{\rho} - \vec{F} \cdot \vec{n}$$

2- Etude du mouvement dans un cas particulier de l'énergie potentielle

On se place dans le cas particulier où l'énergie potentielle $E_p(s)$ est de la forme décrite au § XVI.3.f (voir figure XIX.1).



Fig. XIX.1

où l'origine des énergies potentielles est à l'infini $E_p(\infty) = 0$. A chaque instant nous avons :

$$\frac{1}{2} m v^2 + E_p = E$$

d'où : $$\frac{1}{2} m v^2 = E - E_p \geq 0$$

donc toutes les régions où $E - E_p(s) < 0$ sont interdites.

Pour étudier le mouvement de la particule dans le champ de forces conservatif qui dérive de l'énergie potentielle E_p nous allons considérer les cas particuliers suivants :

Premier cas :

Considérons que $E = E_1 \geq E_p(\infty) = 0$ (voir figure XIX.1').

Supposons que la particule M part du point $M_0(s_0)$ et se déplace vers la gauche alors elle atteint la position $M_1(s_1)$ telle que $E_1 = E_p(s_1)$ ce qui correspond à $E_c = E_1 - E_p(s_1) = 0$; la particule s'arrête car la région $E_1 - E_p(s) < 0$ est interdite. La vitesse de la particule s'annule donc en ce point et celle-ci repart. $M(s_1)$ est appelé point de rebroussement ; la particule peut aller à priori à l'infini (vers la droite).

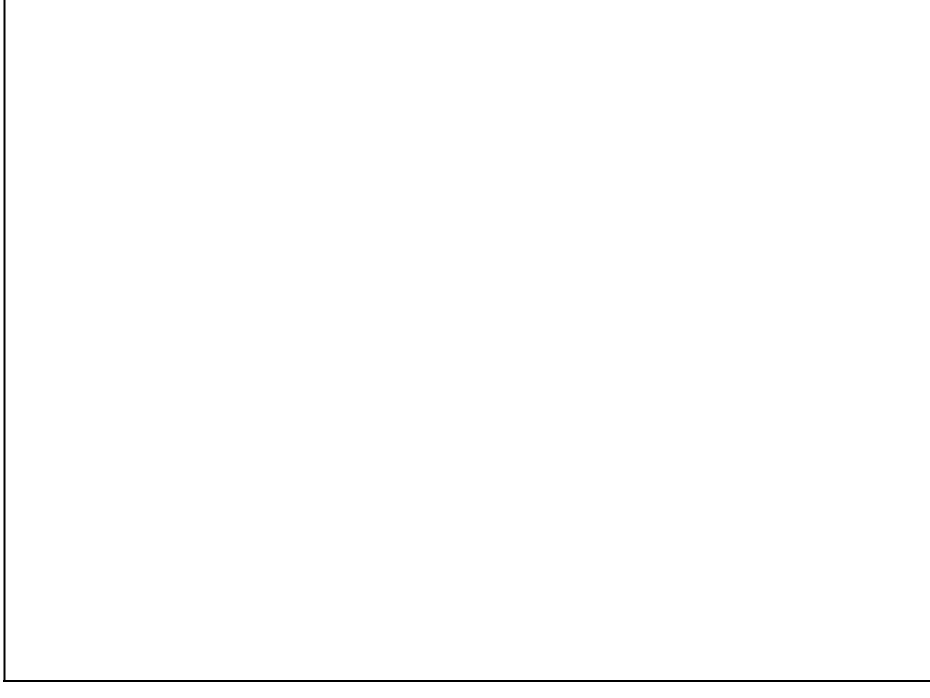


Fig. XIX.1'

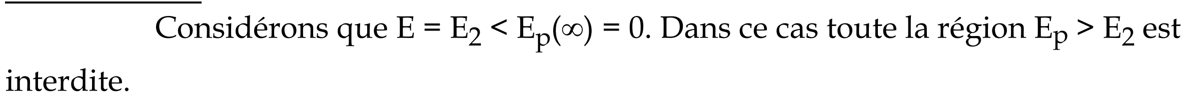
En résumé :

Si le point matériel M est laché à t = 0 du point $M_0(s_0)$ alors il va tendre vers la position d'équilibre $M(s_e)$, au cours de cette évolution son énergie potentielle baisse alors que son énergie cinétique croît. Le mouvement du point matériel est alors accéléré jusqu'en s_e.

Si le point matériel se déplace de sa position d'équilibre $M(s_e)$ à la position $M_1(s_1)$ alors son énergie potentielle croît tandis que son énergie cinétique décroît. Le mouvement du point matériel est alors décéléré.

Au cours du déplacement de $M_1(s_1)$ à $M(s_e)$ l'énergie potentielle décroît et l'énergie cinétique croît donc le mouvement est accéléré.

Deuxième cas :



Considérons que $E = E_2 < E_p(\infty) = 0$. Dans ce cas toute la région $E_p > E_2$ est interdite.



La droite E_2 = cte coupe la courbe $E_p(s)$ en deux points Q et Q'. Seul l'intervalle QQ' est permis au mouvement de la particule qui oscille alors entre les positions correspondant à l'abscisse curviligne s telle que :

$$s_Q < s < s_{Q'}$$

3- Etat lié et état de diffusion

a- Etat lié

Une particule dans un champ de forces qui dérive d'un potentiel est dans un état lié lorsque cette particule ne peut pas s'éloigner infiniment de sa position initiale (ceci correspond au 2ème cas du paragraphe précédent).
Cela suppose que :

- Le potentiel possède au moins un minimum
- L'énergie mécanique est plus petite que la valeur de $E_p(\infty)$ et plus grande que le minimum de l'énergie potentielle.

b- Etat de diffusion

Une particule dans un champ de forces qui dérive d'un potentiel est dans un état de diffusion lorsque cette particule peut s'éloigner infiniment de sa position initiale. Pour cela il faut que l'énergie mécanique soit supérieure ou égale à l'énergie potentielle à l'infini.

$$E \geq E_p(\infty)$$

(Ceci correspond au premier cas du paragraphe précédent).

Remarques :
* Si une particule est dans un état lié, on appelle énergie de libération E_l , l'énergie minimale qu'il faut fournir pour qu'elle passe dans un état de diffusion.

* Si l'énergie mécanique est égale au minimum de l'énergie potentielle $E = E_p(s_e)$ alors l'état est lié et le mouvement est stationnaire. Il est possible de montrer que ce mouvement stationnaire est stable, c'est-à-dire que toute légère perturbation du point matériel provoque un mouvement d'oscillations autour de la position initiale. Développons l'énergie potentielle au voisinage de la position d'équilibre s_e :

$$E_p(s) = E_p(s_e) + (s - s_e)\left(\frac{dE_p}{ds}\right)_{s = s_e} + \frac{(s - s_2)^2}{2!}\left(\frac{d^2E_p}{ds^2}\right)_{s = s_e} + \ldots$$

Comme $E_p(s_e)$ représente un minimum, on a :

$$\left(\frac{dE_p}{ds}\right)_{s = s_e} = 0 \qquad \text{et} \qquad \left(\frac{d^2E_p}{ds^2}\right)_{s = s_e} = K > 0$$

d'où :

$$\frac{1}{2}\ m\ (\frac{ds}{dt}\ )^2 + E_p(s_e) + \frac{1}{2}\ K\ (s - s_e)^2 = 0$$

C'est l'équation différentielle d'une oscillation autour de $s = s_e$ avec la pulsation $\left(\frac{K}{m}\right)^{1/2}$. En effet, si on dérive, on obtient l'équation différentielle du second ordre bien connue :

$$\frac{d^2}{dt^2}(s - s_e) + \omega_0^2\ (s - s_e) = 0$$

où : $\omega_0^2 = \frac{K}{m}$

Par conséquent, l'équilibre (s_e = cte) est stable si l'énergie potentielle est minimale.

XX - Etude dynamique du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale.

1- Définition

Un point matériel M est soumis à une force centrale si l'énergie potentielle d'interaction de ce point avec un centre de forces O ne dépend que de la norme r du vecteur position $\vec{r} = \vec{OM}$. La force centrale s'écrit en coordonnées polaires sous la forme :

$$\vec{F} = - \vec{grad}\ E_p(r)$$

$$= - \frac{dE_p}{dr}\ \vec{e_r}$$

elle est portée par le vecteur position $\vec{r}$, elle passe donc constamment par le centre O, ce qui justifie le nom de "force centrale".

2- Propriétés déduites du mouvement à force centrale

a- Caractère plan de la trajectoire

Le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale est plan. En effet, le moment en O de la force centrale est nul

$$\vec{M}_{\vec{F}\,/o} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = 0$$

et à partir du théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_o}{dt} = \vec{M}_{\vec{F}\,/o}$$

on déduit que le moment cinétique est constant :

$$\vec{L}_o = \vec{cte}$$

d'où :

$$\vec{OM} \wedge m\vec{v}(M)_{/R} = \vec{cte}$$

donc le vecteur position $\vec{OM}$ et la vitesse $\vec{v}(M)_{/R}$ sont constamment normaux au moment cinétique $\vec{L}_o$. Il en résulte que la trajectoire de M est contenue dans le plan perpendiculaire à $\vec{L}_o$ et passant par O. Donc le mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale est plan.

b- Loi des aires :

Les aires balayées par le vecteur position pendant des intervalles de temps égaux sont égales.

Pour simplifier on considère que le moment cinétique est orienté suivant Oz : $\vec{L}_o = L_o \vec{e}_z$. Ce moment exprimé en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{L}_o = r\,\vec{e}_r \wedge m\left(\frac{dr}{dt}\vec{e}_r + r\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_\varphi\right)$$

$$= m\,r^2\frac{d\varphi}{dt}\vec{e}_z$$

d'où le module du moment cinétique :

$$L_o = m\,r^2\frac{d\varphi}{dt} \qquad (1)$$

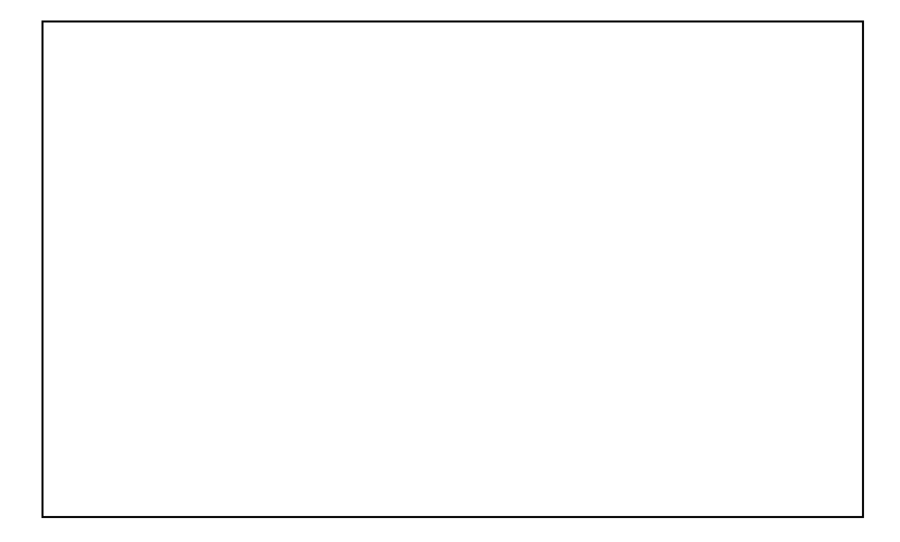
nous avons défini (VIII-2-c) la constante des aires par :

$$C = r^2\,\frac{d\varphi}{dt}$$

de la relation (1) on voit que :

$$C = \frac{L_o}{m}$$

C est une constante, puisque le moment cinétique est constant.



On voit sur la figure que l'aire élémentaire dS, balayée par le rayon vecteur est :

$$dS = \frac{1}{2}\, r^2\, d\varphi$$

elle s'écrit en fonction de la constante des aires sous la forme :

$$dS = \frac{1}{2}\, C\, dt$$

ce qui démontre la loi des aires : les aires balayées pendant des intervalles de temps égaux sont égales .

c- Nature conservative de la force centrale

Toute force centrale dérive d'un potentiel. En effet, considérons la force centrale :

$$\vec{F} = F(r)\, \vec{e}_r$$

Le travail élémentaire de cette force est :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{M}$$

où le déplacement élémentaire en coordonnées polaires $\vec{dM} = dr\,\vec{e_r} + r\,d\varphi\,\vec{e_\varphi}$

d'où :

$$dW = F(r)\,\vec{e_r} \cdot (dr\,\vec{e_r} + r\,d\varphi\,\vec{e_\varphi})$$

$$= F(r)\,dr$$

Le travail de la force centrale entre A et B s'écrit :

$$W_A^B = \int_{r_A}^{r_B} F(r)\,dr$$

Comme F(r) ne dépend que de r alors le travail entre A et B, W_A^B , ne dépend que de r_A et r_B, ou en déduit que F(r) dérive d'un potentiel. Alors :

$$dW = -\,dE_p$$

et $$dE_p = -\,F\,dr$$

3- Equation du mouvement - trajectoire

Soit un point matériel M placé dans un champ de forces conservatif. La conservation de l'énergie mécanique s'écrit :

$$E = E_c + E_p = cte$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,v^2 + E_p(r)$$

En coordonnées polaires la vitesse est donnée par :

$$\vec{v}(M)_{/R} = \frac{dr}{dt}\,\vec{e_r} + r\,\frac{d\varphi}{dt}\,\vec{e_\varphi}$$

d'où l'intégrale première de l'énergie.

$$E = \frac{1}{2}\ m\ \left[\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2\right] \qquad (2)$$

par ailleurs (1) :

$$C = \frac{L_o}{m} = r^2\frac{d\varphi}{dt}$$

Ces deux équations permettent de déterminer les équations du mouvement et la trajectoire .

En effet, à partir de (1) on a :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C}{r^2} = \frac{L_o}{mr^2} \qquad (3)$$

en portant dans (2) on a :

$$\frac{2}{m}\ [E - E_p(r)] = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + r^2\frac{C^2}{r^4}$$

d'où :

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \frac{2}{m}\ \left[E - E_p(r) - \frac{m}{2}\ \frac{C^2}{r^2}\ \right]$$

$$= \frac{2}{m}\ \left[E - E_p(r) - \frac{L_o^2}{2\ r^2\ m}\ \right]$$

donc :

$$\frac{dr}{dt} = \pm\sqrt{\frac{2}{m}}\left[E - E_p(r) - \frac{L_o^2}{2\,m\,r^2}\right]^{1/2} \qquad (4)$$

Le rapport de (3) sur (4) donne :

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\frac{d\varphi}{dt}}{\frac{dr}{dt}} = \frac{L_o}{m\,r^2}\;\frac{1}{\left[\frac{2}{m}\left(E - E_p - \frac{L_o^2}{2m\,r^2}\right)\right]^{1/2}}$$

La trajectoire s'obtient par intégration :

$$\varphi = \int \frac{L_o dr}{r^2\left\{2m\,(E - E_p - \frac{L_o^2}{2m\,r^2})\right\}^{1/2}} + \varphi_0$$

* <u>Cas particulier d'une force Newtonienne</u> :

Considérons que la force centrale $\vec{F}$ est newtonienne, c'est-à-dire :

$$\vec{F} = -\frac{K}{r^2}\vec{e}_r$$

K est positif ou négatif suivant que la force est attractive ou repulsive. L'énergie potentielle associée à F est :

$$E_p = \int \frac{K}{r^2}\vec{e}_r\;dr = -\frac{K}{r}$$

Si on adopte comme origine des énergies potentielles celle pour r infini, donc :

$$E_p = -\frac{K}{r}$$

L'équation de la trajectoire :

$$\varphi = \int \frac{L_o\, dr}{r^2 \left\{2m\left(E - \frac{\varepsilon\,|K|}{r} - \frac{L_o^2}{2m\, r^2}\right)\right\}^{1/2}} + \varphi_0$$

où $\varepsilon = +1$ dans le cas attractif.
$= -1$ dans le cas répulsif.

Posons le changement de variables : $a^2 = \frac{m^2}{L_o^2} K^2 + 2m\,E$ et $b = \frac{m\,\varepsilon|K|}{L_o} + \frac{L_o}{r}$

d'où :

$$a^2 - b^2 = 2m \left(E - \frac{\varepsilon\,|K|}{r} - \frac{L_o^2}{2m\, r^2}\right)$$

et :

$$db = -\frac{L_o}{r^2}\, dr$$

donc :

$$\varphi = \int -\frac{db}{(a^2 - b^2)^{1/2}} + \varphi_0 = -\,\mathrm{Arc}\cos\left(\frac{b}{a}\right) + \varphi_0$$

ceci s'écrit également sous la forme :

$$\cos(\varphi - \varphi_0) = \frac{+\left(m\frac{\varepsilon}{L_o}\,|K| + \frac{L_o}{r}\right)}{\left(m^2\frac{K^2}{L_o^2} + 2m\,E\right)^{1/2}} = \frac{\varepsilon + \frac{L_o^2}{m\,|K|\,r}}{\left(1 + \frac{2L_o^2}{m\,K^2}E\right)^{1/2}}$$

Si on pose :

$$P = \frac{L_o^2}{m\ |K|} \quad \text{et} \quad e = \left(1+\frac{2L_o^2}{m\,K^2}\ E\right)^{1/2}$$

On obtient :

$$\varepsilon + \frac{P}{r} = e \cos(\varphi - \varphi_0)$$

Soit :

$$r = \frac{P}{e \cos(\varphi - \varphi_0) - \varepsilon}$$

Cette équation représente en coordonnées cylindriques une conique dont le centre O est l'un des foyers, p le paramètre focal et e l'excentricité (voir annexe).

P A R T I E   E

Etude des Systèmes de Points matériels
Théorèmes généraux.

Tout objet peut être considéré comme un système de points matériels M_i de masse m_i et de vitesse $\vec{v}(M_i)$.

La force $\vec{F}_i$ qui agit sur le point M_i du système peut être également considérée comme étant la résultante d'une force $\vec{f}_i^{ext}$ exercée de l'extérieur du système sur le point M_i et d'une force $\sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$ exercée par toutes les particules M_j ($j \neq i$) du système sur M_i. Ainsi la force $\vec{F}_i$ agissant sur M_i s'écrit :

$$\vec{F}_i = \vec{f}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$$

$\vec{f}_i^{ext}$ est une force dite extérieure.

$\vec{f}_{ij}$ est une force dite d'interaction qui est une force interne au système.

La résultante $\vec{F}$ des forces appliquées sur tout le système c'est-à-dire sur l'ensemble des points M_i est :

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{f}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$$

Or la double sommation $\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$ est nulle car les forces d'interaction s'annulent deux à deux et il reste donc uniquement la somme des forces extérieures dans la résultante $\vec{F}$:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \sum_i \vec{f}_i^{ext}$$

XXXVI- Théorèmes généraux pour un système de points matériels.

1- Quantité de mouvement d'un système - Théorème associé

a- Définition

Soit un système de n points matériels M_1, M_2 , ... , M_i, ... M_n de masses respectives m_1, m_2, ... , m_i, ... , m_n et de vitesses respectives $\vec{v}(M_1)_{/R}$, $\vec{v}(M_2)_{/R}$, ... , $\vec{v}(M_i)_{/R}$ ... , $\vec{v}(M_n)_{/R}$ par rapport à un référentiel quelconque (R).

La quantité de mouvement d'un point M_i est définie par :

$$\vec{P}_i = m_i \, \vec{v}(M_i)_{/R}$$

et la quantité de mouvement totale du système de points matériels est définie alors par rapport au référentiel (R) par :

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{n} \vec{P}_i = \sum_{i=1}^{n} m_i \vec{v}(M_i)_{/R}$$

b- Théorème de la quantité de mouvement

Soit $\vec{P}$ la quantité de mouvement totale d'un système de points matériels par rapport à un référentiel (R) et $\vec{F}_{ext}$ la résultante des forces extérieures appliquées au système; le théorème de la quantité de mouvement exprime que la dérivée par rapport au temps de $\vec{P}$ est égale à $\vec{F}_{ext}$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}_{ext} \qquad (1)$$

<u>**Démonstration**</u> :

On applique le principe fondamental à un seul point, M_i parmi les n points matériels qui constituent le système :

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{F}_i$$

avec $\vec{P}_i = m_i\ \vec{v}(M_i)_{/R}$ et $\vec{F}_i = \vec{f}_i^{ext} + \sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}$ telle que nous l'avons définie au début du chapitre. Pour tout le système nous avons, compte tenu de ce qui précède :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\Big(\sum_{i=1}^{n}\vec{P}_i\Big) = \sum_{i=1}^{n}\frac{d\vec{P}_i}{dt}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij}$$

or : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij} = \vec{0}$

d'où : $\displaystyle\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\vec{f}_i^{ext} = \vec{F}_{ext}$

Remarques :

* On peut vérifier aisément que la double sommation est nulle sur un exemple d'un système à trois particules :

$$\sum_{i=1}^{3}\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij} = \vec{f}_{12} + \vec{f}_{13} + \vec{f}_{21} + \vec{f}_{23} + \vec{f}_{31} + \vec{f}_{32}$$

or : $\vec{f}_{12} + \vec{f}_{21} = \vec{0}$; $\vec{f}_{13} + \vec{f}_{31} = \vec{0}$ et $\vec{f}_{23} + \vec{f}_{32} = \vec{0}$

donc : $\displaystyle\sum_{i=1}^{3}\sum_{j\neq i}\vec{f}_{ij} = \vec{0}$

ce que l'on peut généraliser pour un système à n particules, n quelconque.

* Si le système de points matériels est isolé; nous avons alors $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et dans la relation (1) nous aurons :

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{0} \qquad \text{d'où} \qquad \vec{P} = \overrightarrow{cte}$$

donc il y a dans ce cas conservation de la quantité de mouvement totale du système .

* Dans ce qui précède nous n'avons pas précisé si le référentiel (R) est galiléen ou pas. Dans le cas où (R) n'est pas galiléen il faut inclure dans $\vec{f}_i^{ext}$ et par conséquent dans $\vec{F}_{ext} = \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i^{ext}$ les forces d'inertie.

2- Moment cinétique d'un système - Théorème associé

a- Définition

Soit un système de n points matériels $M_1, M_2, \ldots , M_i \ldots , M_n$ de masses $m_1, m_2, \ldots , m_i, \ldots m_n$ et de vitesses respectives $\vec{v}(M_1)_{/R}$, $\vec{v}(M_2)_{/R}$, ... , $\vec{v}(M_i)_{/R}$ ... , $\vec{v}(M_n)_{/R}$ par rapport à un référentiel (R); le moment cinétique d'un point M_i en un point O est défini par :

$$\vec{L}_0^i = \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \, \vec{v}(M_i)_{/R}$$

$\vec{L}_0^i$ représente donc le moment par rapport à O du vecteur quantité de mouvement $\vec{P}_i = m_i \, \vec{v}(M_i)_{/R}$ appliqué au point M_i.

Pour le système de points matériels, le moment cinétique total $\vec{L}_0$ en un point O est la résultante des moments cinétiques en O de chaque point M_i, c'est-à-dire :

$$\vec{L}_0 = \sum_{i=1}^{n} \vec{L}_0^i = \sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{OM}_i \wedge m_i \, \vec{v}(M_i)_{/R} \qquad (2)$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{OM}_i \Lambda \vec{P}_i$$

b- Théorème du moment cinétique

La dérivée par rapport au temps du moment cinétique en O d'un système de points matériels est égale à la somme des moments par rapport à O des forces extérieures qui agissent sur les différents points du système ; et nous avons :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \vec{OM}_i \Lambda \vec{f}_i^{ext} \qquad (3)$$

Démonstration :

Pour le point M_i nous avons $\vec{L}_0^i = \vec{OM}_i \Lambda \vec{P}_i$; d'où la dérivée par rapport au temps :

$$\frac{d\vec{L}_0^i}{dt} = \vec{OM}_i \Lambda \frac{d\vec{P}_i}{dt} + \frac{d\vec{OM}_i}{dt} \Lambda \vec{P}_i$$

Or, les vecteurs $\frac{d\vec{OM}_i}{dt} = \vec{v}(M_i)_{/R}$ et $\vec{P}_i = m_i \vec{v}(M_i)_{/R}$ sont colinéaires, par conséquent le terme $\frac{d\vec{OM}_i}{dt} \Lambda \vec{P}_i$ est nul et nous avons :

$$\frac{d\vec{L}_0^i}{dt} = \vec{OM}_i \Lambda \frac{d\vec{P}_i}{dt}$$

$$= \vec{OM}_i \Lambda \vec{F}_i$$

$\vec{F}_i = \vec{F}_i = \vec{f}_i^{ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$ étant la force agissant sur M_i.

Déterminons $\frac{d\vec{L}_0}{dt}$ compte tenu de ce qui précède :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_0^i$$

$$= \sum_i \frac{d\vec{L}_0^i}{dt} = \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{F}_i$$

$$= \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{f}_i^{ext} + \sum_i \vec{OM}_i \wedge \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$$

Le terme $\sum_i \vec{OM}_i \wedge \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} = \vec{0}$, car, en développant la double sommation, à chaque force $\vec{f}_{ij}$ appliqué au point M_i on lui associe $\vec{f}_{ji}$ appliqué au point j et ainsi on trouve des termes qui s'annulent deux à deux car étant de la forme :

$$\vec{OM}_i \wedge \vec{f}_{ij} + \vec{OM}_j \wedge \vec{f}_{ji}$$

que nous pouvons écrire, du fait que $\vec{f}_{ij} = - \vec{f}_{ji}$ sous la forme :

$$= \vec{OM}_i \wedge \vec{f}_{ij} - \vec{OM}_j \wedge \vec{f}_{ij}$$

$$= (\vec{OM}_i - \vec{OM}_j) \wedge \vec{f}_{ij}$$

$= \vec{M_jM_i} \wedge \vec{f}_{ij} = \vec{0}$ puisque la force $\vec{f}_{ij}$ est par définition portée par la direction $\vec{M_jM_i}$.

Finalement, nous avons :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt} \sum_i \vec{L}_0^i = \sum_i \vec{OM}_i \wedge \vec{f}_i^{ext}$$

expression que nous cherchions à démontrer.

Remarque :

* L'expression $\sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = \vec{0}$ peut être vérifiée aisément sur un exemple de système à trois points matériels i = 1, 2, 3. En effet :

$$\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{OM_i} \wedge \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{f}_{12} + \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{f}_{13}$$

$$+ \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{f}_{21} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{f}_{23}$$

$$+ \overrightarrow{OM_3} \wedge \vec{f}_{31} + \overrightarrow{OM_3} \wedge \vec{f}_{32}$$

et en regroupant les termes en $\vec{f}_{ij}$ et $\vec{f}_{ji}$ nous avons :

$$\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{OM_i} \wedge \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{f}_{12} + \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{f}_{21}$$

$$+ \overrightarrow{OM_1} \wedge \vec{f}_{13} + \overrightarrow{OM_3} \wedge \vec{f}_{31}$$

$$+ \overrightarrow{OM_2} \wedge \vec{f}_{23} + \overrightarrow{OM_3} \wedge \vec{f}_{32}$$

$$= \overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{f}_{12} + \overrightarrow{M_3M_1} \wedge \vec{f}_{13} + \overrightarrow{M_3M_2} \wedge \vec{f}_{23}$$

or : $\overrightarrow{M_2M_1} \wedge \vec{f}_{12} = \vec{0}$

$\overrightarrow{M_3M_1} \wedge \vec{f}_{13} = \vec{0}$

$\overrightarrow{M_3M_2} \wedge \vec{f}_{23} = \vec{0}$

d'où :

$$\sum_{i=1}^{3} \overrightarrow{OM_i} \wedge \sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij} = \vec{0}$$

* Pour un système isolé de points (dans le sens où l'on a $\vec{f}_i^{ext} = \vec{0}$ quel que soit le point M_i), il y a conservation du moment cinétique total par rapport à un point O. En effet :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{L}_0^i$$

$$= \sum_i \frac{d}{dt}\vec{L}_0^i$$

Or nous avons :

$$\frac{d}{dt}\vec{L}_0^i = \vec{OM}_i \wedge \vec{f}_i^{ext} = \vec{0} \qquad \text{(système isolé)}$$

d'où :

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \sum_i \frac{d}{dt}\vec{L}_0^i = \vec{0}$$

et par conséquent :

$$\vec{L}_0 = \sum_i \vec{L}_0^i = \vec{cte}$$

il y a alors conservation du moment cinétique total.

XXVII- Notion de centre de masse d'un système - Théorème associé.

1- Définition

On considère un système de n points matériels M_1, M_2, ... M_i, ..., M_n de masses respectives m_1, m_2, ..., m_i, ..., m_n et soit O un point origine quelconque.

On appelle centre de masse (ou centre d' inertie) C d'un système de points matériels, un point fictif dont la position par rapport au point origine quelconque O est donnée par :

$$\vec{OC} = \frac{\sum_i m_i \vec{OM_i}}{\sum_i m_i}$$

Si $m = \sum_i m_i$ est la masse totale du système, nous pouvons également écrire :

$$\vec{OC} = \frac{\sum_i m_i \vec{OM_i}}{m} \qquad (4)$$

Remarques :

* La position du centre de masse C ne dépend pas de l'origine O, mais dépend uniquement de la distribution géométrique des masses. En effet :

$$\vec{OC} = \frac{\sum_i m_i \vec{OM_i}}{m}$$

L'origine O peut être prise au point C lui même et nous avons alors :

$$\sum_i m_i \vec{CM_i} = \vec{0} \qquad (5)$$

cette dernière relation définit donc le point C sans intervention de points extérieurs ; donc C ne dépend pas du point origine O. Par ailleurs C est défini de manière unique par cette même relation. En effet soit un autre point C' vérifiant également la relation (5). Nous avons alors :

$$\sum_i m_i \vec{C'M_i} = \vec{0}$$

$$= \sum_i m_i \overrightarrow{C'C} + \sum_i m_i \overrightarrow{CM_i}$$

or : $$\sum_i m_i \overrightarrow{CM_i} = \vec{0}$$ d'après (5)

d'où : $$\sum_i m_i \overrightarrow{C'C} = \vec{0}$$

et par conséquent C' et C sont confondus, ce qui traduit l'unicité du centre de masse C.

* Le centre de masse coïncide avec le centre de gravité si le système de points matériels est dans un champ de la pesanteur $\vec{g}$ uniforme dans la limite du système.

En effet le centre de gravité G du système est défini par :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i g_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i g_i} \qquad (6)$$

m_i est la masse du point M_i et g_i le module du champ de la pesanteur au point M_i ; comme ce champ est supposé constant ($\vec{g}$ uniforme) alors $g_i = g =$ cte et la relation (6) s'écrit :

$$\overrightarrow{OG} = \frac{\sum_i m_i g \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i g} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{\sum_i m_i}$$

$$= \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{OM_i}}{m}$$

$$= \overrightarrow{OC}$$

Le centre de masse C coïncide donc bien avec le centre de gravité G dans le cas de $\vec{g}$ uniforme.

2- Vitesse du centre de masse

Soit (R) un référentiel quelconque et C le centre de masse d'un système. On définit la vitesse de C par rapport à (R) par :

$$\vec{v}(C)_{/R} = \left(\frac{d\overrightarrow{OC}}{dt}\right)_{/R} = \frac{\sum_i m_i \vec{v}(M_i)_{/R}}{\sum_i m_i}$$

que l'on peut écrire également sous la forme :

$$\vec{v}(C)_{/R} = \frac{1}{m}\sum_i \vec{P_i} \qquad (7)$$

avec $m = \sum_i m_i$ masse totale du système et $\vec{P_i} = m_i \ \vec{v}(M_i)_{/R}$ quantité de mouvement du point M_i par rapport à (R).

__Remarques__ :

* Soit $\vec{P} = \sum_i \vec{P_i}$ la quantité de mouvement totale du système de points matériels; d'après (7) nous avons donc :

$$\vec{P} = m \ \vec{v}(C)_{/R}$$

C'est-à-dire que la quantité de mouvement totale d'un système de points matériels est égale à celle de son centre de masse affecté de la masse totale du système.

* Si la vitesse du centre de masse est nulle, le système de points matériels en tant qu'un tout est au repos, les différents points pouvant être en mouvement.

3- Moment cinétique d'un système de points matériels en introduisant le centre de masse

Le moment cinétique total en un point O d'un système de points matériels est égal à la somme du moment cinétique en O du centre de masse C affecté de la masse totale m du système et animé de la vitesse $\vec{v}(C)_{/R}$, et du moment cinétique du système de points matériels au centre de masse C ; c'est-à-dire :

$$\vec{L}_{0\,/R} = \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{v}(C)_{/R} + \sum_i \overrightarrow{CM_i} \wedge m_i\,\vec{v}(M_i)_{/R} \qquad (8)$$

<u>**Démonstration**</u> :

Nous avons vu § I,2 que $\vec{L}^i_{0\,/R} = \overrightarrow{OM_i} \wedge m_i\,\vec{v}(M_i)_{/R}$
pour le point matériel M_i ; introduisons le centre de masse C dans cette expression :

$$\overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{CM_i}$$

$$\vec{L}^i_{0\,/R} = \overrightarrow{OC} \wedge m_i\,\vec{v}(M_i)_{/R} + \overrightarrow{CM_i} \wedge m_i\,\vec{v}(M_i)_{/R}$$

et le moment cinétique total s'écrit :

$$\vec{L}_{0\,/R} = \sum_i \vec{L}^i_{0\,/R}$$

$$= \sum_i \overrightarrow{OC} \wedge m_i\,\vec{v}(M_i)_{/R} + \sum_i \overrightarrow{CM_i} \wedge m_i\,\vec{v}(M_i)_{/R}$$

$$= \vec{OC} \wedge \sum_i m_i \vec{v}(M_i)_{/R} + \sum_i \vec{CM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{/R}$$

Or nous avons vu précédemment § II,2 que :

$$\sum_i m_i \vec{v}(M_i)_{/R} = m\,\vec{v}(C)_{/R}$$

$$= \vec{P}$$

d'où : $$\vec{L}_{0\,/R} = \vec{OC} \wedge m\,\vec{v}(C)_{/R} + \sum_i \vec{CM_i} \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{/R}$$

4- Théorème du mouvement du centre de masse

Dans le mouvement d'un système de points matériels par rapport à un référentiel (R), le centre de masse C se déplace comme si toute la masse du système était concentrée en ce point C et sur lequel étaient appliquées toutes les forces extérieures agissant sur le système. Ainsi on pourra écrire :

$$m\frac{d}{dt}\vec{v}(C)_{/R} = \vec{F}_{ext} \qquad (9)$$

avec : $$\vec{F}_{ext} = \sum_i \vec{f}_i^{\,ext}$$

<u>**Démonstration**</u> :

Soit $\vec{P}_i = m_i\ \vec{v}(M_i)_{/R}$ la quantité de mouvement du point M_i. D'après le principe fondamental appliqué à M_i :

$$\frac{d\vec{P}_i}{dt} = \vec{F}_i$$

$$= \vec{f}_i^{\,ext} + \sum_{i\neq j} \vec{f}_{ij}$$

en faisant la sommation sur les différents points du système :

$$\sum_i \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i^{ext} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \vec{f}_i^{ext} = \vec{F}_{ext}$$

or : $$\sum_i \frac{d\vec{P}_i}{dt} = \frac{d}{dt}\sum_i \vec{P}_i$$

$$= \frac{d}{dt}\vec{P}$$

avec $\vec{P} = \sum_i \vec{P}_i$ la quantité de mouvement totale du système, ou encore $\vec{P} = m\, \vec{v}(C)/_R$. D'où :

$$m\frac{d}{dt}\vec{v}(C)/_R = \vec{F}_{ext}$$

<u>Remarques</u> :

* Si le système est isolé, $\vec{F}_{ext} = \vec{0}$ et par conséquent $m\frac{d}{dt}\vec{v}(C)/_R = \vec{0}$, c'est-à-dire $\vec{v}(C)/_R = \overrightarrow{cte}$; le centre de masse C est alors animé d'un mouvement rectiligne et uniforme.

* Si le référentiel (R) n'est pas galiléen, la résultante des forces extérieures $\vec{F}_{ext}$ concerne aussi bien les forces appliquées que les forces d'inertie.

XXVIII- <u>Référentiel du centre de masse - Théorèmes de Koenig.</u>

1- Définition

On appelle référentiel du centre de masse (R_c) associé à un référentiel (R) un référentiel lié au centre de masse C du système et tel qu'il soit en mouvement de translation par rapport au référentiel (R).

Remarques :

* Le référentiel du centre de masse (R_c) n'est pas en général galiléen; pour qu'il le soit il faut que la translation par rapport à (R) soit rectiligne uniforme, c'est-à-dire que l'on ait $\vec{v}(C)/_R = \overrightarrow{cte}$ et que (R) soit lui même galiléen.

* La quantité de mouvement totale du système par rapport au référentiel du centre de masse (R_c) est nulle, c'est-à-dire : $\vec{P}/_{R_c} = \vec{0}$.

En effet soit un point M_i du système et (R) le référentiel par rapport auquel (R_c) est en mouvement de translation. D'après la loi de composition des vitesses nous avons :

$$\vec{v}(M_i)/_R = \vec{v}(M_i)/_{R_c} + \vec{v}_e(M_i) \qquad (1)$$

avec $\vec{v}(M_i)/_{R_c} = \frac{d}{dt}\overrightarrow{CM_i}$ et la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e(M_i) = \vec{v}(C)/_R$ (R_c) étant en mouvement de translation par rapport à (R) ; or la vitesse du centre de masse est par définition :

$$\vec{v}(C)/_R = \frac{\sum_i m_i \, \vec{v}(M_i)/_R}{m} \qquad (2)$$

et en remplaçant $\vec{v}(M_i)/_R$ par son expression (1) nous obtenons dans (2) :

$$m \, \vec{v}(C)/_R = \sum_i m_i \, \vec{v}(M_i)/_{R_c} + \sum_i m_i \, \vec{v}(C)/_R$$

$$= \sum_i m_i \, \vec{v}(M_i)/_{R_c} + m \, \vec{v}(C)/_R$$

d'où $\sum_i m_i \, \vec{v}(M_i)/_{R_c} = \vec{0}$, c'est-à-dire que la quantité de mouvement totale du système est nulle par rapport à (R_c).

$$\vec{P}_{/R_c} = \sum_i m_i \, \vec{v}(M_i)_{/R_c} = m \, \vec{v}(C)_{/R_c} = \vec{0} \qquad (3)$$

2- Premier théorème de Koenig (relatif au moment cinétique)

Soit (R_c) le référentiel du centre de masse (donc en mouvement de translation par rapport à un référentiel (R)); le premier théorème de Kœnig exprime que le moment cinétique d'un système de points matériels $\vec{L}_{0/R}$ par rapport à (R) en un point O quelconque est égal à la somme du moment cinétique en O du centre de masse C affecté de la masse totale du système et animé de la vitesse $\vec{v}(C)_{/R}$ et du moment cinétique total en C du système par rapport au référentiel (R_c) :

$$\vec{L}_{0/R} = \overrightarrow{OC} \wedge m\vec{v}(C)_{/R} + \sum_i \overrightarrow{CM_i} \wedge m_i \, \vec{v}(M_i)_{/R_c} \qquad (4)$$

<u>**Démonstration**</u> :

Pour un point M_i du système nous avons :

$$\vec{v}(M_i)_{/R} = \vec{v}(M_i)_{/R_c} + \vec{v}(C)_{/R}$$

qui exprime la loi de composition des vitesses ; d'où :

$$m_i \, \vec{v}(M_i)_{/R} = m_i \vec{v}(M_i)_{/R_c} + m_i \, \vec{v}(C)_{/R} \qquad (5)$$

la quantité de mouvement totale du système permet d'écrire :

$$\vec{P}_{/R} = \sum_i m_i \, \vec{v}(M_i)_{/R}$$

$$\vec{v}(C)_{/R} = \frac{\vec{P}_{/R}}{m}$$

et en remplaçant dans (1) :

$$m_i \, \vec{v}(M_i)_{/R} = m_i \frac{\vec{P}_{/R}}{m} + m_i \vec{v}(M_i)_{/R_c} \qquad (6)$$

Le moment cinétique d'un système de points est donné par la relation II, 8 :

$$\vec{L}_{0/R} = \vec{OC} \wedge m\vec{v}(C)_{/R} + \sum_i \vec{CM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{/R}$$

et en y remplaçant $m_i \vec{v}(M_i)_{/R}$ par son expression (6) nous obtenons :

$$\vec{L}_{0/R} = \vec{OC} \wedge m\vec{v}(C)_{/R} + \sum_i \vec{CM}_i \wedge m_i \frac{\vec{P}_{/R}}{m} + \sum_i \vec{CM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{/R_C}$$

Le second terme est nul ; en effet :

$$\sum_i \vec{CM}_i \wedge m_i \frac{\vec{P}_{/R}}{m} = \sum_i m_i \vec{CM}_i \wedge \frac{\vec{P}_{/R}}{m} = \vec{0}$$

du fait que $\sum_i m_i \vec{CM}_i = \vec{0}$ d'après II,5. Finalement nous avons l'expression recherchée:

$$\vec{L}_{0/R} = \vec{OC} \wedge m\vec{v}(C)_{/R} + \sum_i \vec{CM}_i \wedge m_i \vec{v}(M_i)_{/R_C}$$

que l'on peut écrire également sous la forme :

$$\vec{L}_{0/R} = \vec{OC} \wedge \vec{P}_{/R} + \sum_i \vec{CM}_i \wedge \vec{P}_{i/R_C} \qquad (4')$$

avec $\vec{P}_{/R} = m\vec{v}(C)_{/R}$ et $\vec{P}_{i/R_C} = m_i \vec{v}(M_i)_{/R_C}$

Remarque :

* Dans les expressions (4) et (4'), la quantité $\vec{L}_{c/R_C} = \sum_i \vec{CM}_i \wedge \vec{P}_{i/R_C}$ représente le moment cinétique interne du système, c'est-à-dire le moment cinétique au point C par rapport au référentiel (R_C). Ainsi nous pouvons écrire le moment cinétique en un point O quelconque :

$$\vec{L}_{0/R} = \vec{OC} \wedge \vec{P}_{/R} + \vec{L}_{c/R_C}$$

Si on se place dans (R_C) :

$$\vec{L}_{0/R_C} = \vec{OC} \wedge \vec{P}_{/R_C} + \vec{L}_{c/R_C}$$

$$= \vec{L}_{c\,/R_C} \qquad (\ \vec{P}_{/R_C} \text{ étant nul})$$

O étant quelconque, il est par conséquent inutile de préciser le point où l'on détermine le moment cinétique interne et on écrit tout simplement :

$$\vec{L}_{c\,/R_C} = \vec{L}_{/R_C}$$

3- Deuxième théorème de Kœnig (relatif à l'énergie cinétique)

Avec les mêmes données précédentes, le deuxième théorème de Kœnig exprime que l'énergie cinétique totale $E_{c/R}$ d'un système de points matériels par rapport à un référentiel (R) est égale à la somme de l'énergie cinétique (exprimée par rapport à (R)) du centre de masse C affecté de la masse totale m du système et animé de la vitesse $\vec{v}(C)_{/R}$, et de l'énergie cinétique du système en mouvement par rapport au référentiel du centre de masse (R_c) associé à (R). Ainsi le théorème s'exprime par la relation :

$$E_{c/R} = \frac{m}{2}\,\vec{v}^2(C)_{/R} + \sum_i \frac{m_i}{2}\,\vec{v}^2(M_i)_{/R_C} \qquad (7)$$

avec :

$E_{c/R} = \sum_i \frac{m_i}{2}\,\vec{v}^2(M_i)_{/R}$ est l'énergie cinétique totale du système par rapport à (R) ;

$\frac{m}{2}\,\vec{v}^2(C)_{/R}$ est l'énergie cinétique par rapport à (R) du centre de masse C ;

$\sum_i \frac{m_i}{2}\,\vec{v}^2(M_i)_{/R_C}$ est l'énergie cinétique du système en mouvement relatif dans le référentiel du centre de masse, appelée également énergie cinétique interne du système.

<u>**Démonstration**</u> :

L'énergie cinétique du système est :

$$E_{c/R} = \sum_i \frac{m_i}{2} \; \vec{v}^2(M_i)_{/R}$$

D'après la loi de composition des vitesses pour le mouvement de translation de (R_c) par rapport à (R)

$$\vec{v}(M_i)_{/R} = \vec{v}(M_i)_{/R_c} + \vec{v}(C)_{/R}$$

et en remplaçant dans l'expression de l'énergie cinétique nous obtenons :

$$E_{c/R} = \sum_i \frac{m_i}{2} \; \left(\vec{v}(M_i)_{/R_c} + \vec{v}(C)_{/R}\right)^2$$

$$= \sum_i \frac{m_i}{2} \; \vec{v}^2(M_i)_{/R_c} + \vec{v}(C)_{/R} \sum_i m_i \vec{v}(M_i)_{/R_c} + \sum_i \frac{m_i}{2} \; \vec{v}^2(C)_{/R}$$

Le second terme est nul d'après (III,3) et le troisième terme s'écrit :

$$\sum_i \frac{m_i}{2} \; \vec{v}^2(C)_{/R} = \frac{m}{2} \vec{v}^2(C)_{/R}$$

nous avons finalement le résultat (7) recherché :

$$E_{c/R} = \frac{m}{2} \vec{v}^2(C)_{/R} + \sum_i \frac{m_i}{2} \; \vec{v}^2(M_i)_{/R_c}$$

expression que nous pouvons écrire également sous la forme :

$$E_{c/R} = \frac{\vec{P}_{/R}^{\,2}}{2m} + E_{c/R_c}$$

avec $\frac{\vec{P}_{/R}^{\,2}}{2m} = \frac{m}{2} \vec{v}^2(C)_{/R}$ et $E_{c/R_c} = \sum_i \frac{m_i}{2} \; \vec{v}^2(M_i)_{/R_c}$ l'énergie cinétique interne du système.

Remarques :

* D'après l'expression (7') nous avons :

$$E_{c/R} = \frac{\vec{P}_{/R}^{\,2}}{2m} + E_{c/R_c}$$

et par conséquent $E_{c/R} \geq E_{c/R_c}$. Ainsi nous pouvons dire que l'énergie cinétique d'un système est minimale dans le référentiel du centre de masse (R_c)

4- Propriété de l'énergie cinétique dans (R_c) dans le cas d'un système à deux particules

Soit un système de deux particules M_1 et M_2 de masses respectives m_1 et m_2, et de quantité de mouvement $\vec{P}_1/R_c$ et $\vec{P}_2/R_c$. Exprimons le rapport des énergies cinétiques de M_1 et M_2.

$$E_c(M_1)/R_c = \frac{1}{2}\ m_1\ \vec{v}^2(M_1)/R_c = \frac{\vec{P}^2_{1/Rc}}{2m}$$

$$E_c(M_2)/R_c = \frac{1}{2}\ m_2\ \vec{v}^2(M_2)/R_c = \frac{\vec{P}^2_{2/Rc}}{2m}$$

d'où le rapport :

$$\frac{E_c(M_1)/R_c}{E_c(M_2)/R_c} = \frac{m_2}{m_1}\ \frac{\vec{P}^2_{1/Rc}}{\vec{P}^2_{2/Rc}} \qquad (8)$$

Or nous avons d'après, la quantité de mouvement totale du système :

$$\vec{P}/R_c = \vec{P}_1/R_c + \vec{P}_2/R_c = \vec{0}$$

d'où : $\vec{P}_1/R_c = -\vec{P}_2/R_c$

et encore :

$$\vec{P}_1^{\,2}/R_c = \vec{P}_2^{\,2}/R_c$$

Soit en remplaçant dans (8)

$$\frac{E_c(M_1)/R_c}{E_c(M_2)/R_c} = \frac{m_2}{m_1} \qquad (9)$$

c'est-à-dire que dans le cas d'un système à deux particules, le rapport des énergies cinétiques de ces deux particules par rapport à (Rc) est égal à l'inverse du rapport de leurs masses.

Par ailleurs nous pouvons également déduire de la relation (9) que si $m_1 > m_2$, alors $E_c(M_1)_{/R_c} < E_c(M_2)_{/R_c}$

XXIX- Notion d'énergie interne d'un système de particules.

1- Energie potentielle d'interaction (d'origine interne au système)

En reprenant ce que nous avons vu au début de cette partie, une particule M_i d'un système est soumise à une force résultante qui peut s'écrire :

$$\vec{F}_i = \vec{f}_i^{\,ext} + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$$

où $\vec{f}_i^{\,ext}$ est la force exercée par le milieu extérieur au système sur la particule M_i et $\vec{f}_{ij}$ la force d'interaction exercée sur M_i par la particule M_j et par conséquent $\sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}$ est la résultante de toutes ces forces d'interaction agissant sur M_i.

Le travail élémentaire de la force extérieure $\vec{f}_i^{\,ext}$ agissant sur M_i lors d'un déplacement $d\vec{M}_i$ est :

$$dW_i^{ext} = \vec{f}_i^{\,ext} \cdot d\vec{M}_i$$

De même le travail élémentaire de la résultante des forces d'interaction agissant sur M_i lors d'un déplacement $d\vec{M}_i$ est :

$$dW_i^{int} = \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{M}_i$$

Dans le cas où les forces d'interaction dérivent d'un potentiel, on définit la différentielle de l'énergie potentielle d'interaction de la particule M_i par :

$$(dE_p)_i^{int} = - dW_i^{int}$$

$$= - \left(\sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}\right) \cdot d\vec{M}_i \qquad (1)$$

et pour l'ensemble du système le travail élémentaire associé est par conséquent :

$$dW^{int} = \sum_i \; dW_i^{int}$$

$$= \sum_i \left(\sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}\right) \cdot d\vec{M}_i$$

et on définit alors la différentielle de l'énergie potentielle d'interaction du système par :

$$dE_p^{int} = \sum_i \; (dE_p)_i^{int}$$

$$= - \sum_i \left(\left(\sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}\right) \cdot d\vec{M}_i\right) \qquad (2)$$

Finalement l'énergie potentielle d'interaction du système est E_p^{int} que l'on obtient par intégration de l'expression (2) :

$$E_p^{int} = - \sum_i \sum_{j\neq i} \int \vec{f}_{ij} . d\vec{M}_i + cte$$

cette énergie potentielle d'interaction est donc définie à une constante près .

<u>Remarques</u> :

* Le terme $\sum_i \left(\left(\sum_{j\neq i} \vec{f}_{ij}\right) \cdot d\vec{M}_i\right)$ dans la relation (2) n'est pas nul en général; en effet cette double sommation comporte des termes que l'on peut regrouper deux à deux sous la forme :

$$\vec{f}_{ij} \cdot d\vec{M}_i + \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{M}_j$$

Or $\vec{f}_{ij} = - \vec{f}_{ji}$ et donc la somme précédente s'écrit :

$$\vec{f}_{ij} \cdot d\vec{M}_i + \vec{f}_{ji} \cdot d\vec{M}_j = \vec{f}_{ij} \left(d\vec{M}_i - d\vec{M}_j \right)$$

$$= \vec{f}_{ij} \cdot d\,\overrightarrow{M_j M_i}$$

$d\,\overrightarrow{M_j M_i}$ est le déplacement relatif de M_i par rapport à M_j qui n'est pas nul lorsque le système n'est pas rigide.

Sur un exemple simple de trois particules, la double sommation peut être explicitée aisément en fixant à chaque fois une valeur de i et en faisant varier j.

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{\substack{j \neq i \\ 1 \leq j \leq 3}} \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{M}_i = (\vec{f}_{12} \cdot d\vec{M}_1 + \vec{f}_{13} \cdot d\vec{M}_1) + (\vec{f}_{21} \cdot d\vec{M}_2 + \vec{f}_{23} \cdot d\vec{M}_2)$$

$$+ (\vec{f}_{31} \cdot d\vec{M}_3 + \vec{f}_{32} \cdot d\vec{M}_3)$$

$$= \vec{f}_{12} \left(d\vec{M}_1 - d\vec{M}_2 \right) + \vec{f}_{13} \left(d\vec{M}_1 - d\vec{M}_3 \right)$$

$$+ \vec{f}_{23} \left(d\vec{M}_2 - d\vec{M}_3 \right)$$

or :
$$d\vec{M}_1 - d\vec{M}_2 = d\vec{OM}_1 - d\,\overrightarrow{OM}_2$$

$$= d\,(\vec{OM}_2 + \overrightarrow{OM}_1)$$

$$= d\,\overrightarrow{M_2 M_1}$$

d'où :

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \cdot d\vec{M}_i = \vec{f}_{12} \cdot d\,\overrightarrow{M_2 M_1} + \vec{f}_{13} \cdot d\,\overrightarrow{M_3 M_1} + \vec{f}_{23} \cdot d\,\overrightarrow{M_3 M_2}$$

* En écrivant la relation (1) : $(dE_p)_i^{int} = - \left(\sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij} \right) \cdot d\vec{M}_i$ comme différentielle totale, nous avons implicitement supposé que la résultante des forces d'interaction qui agissent sur M_i est conservative, c'est-à-dire encore que l'on a :

$$- \left(\sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}\right) \cdot d\vec{M}_i = - \overrightarrow{\text{grad}}(E_P)_i^{int}$$

* L'énergie potentielle d'interaction ne dépend pas du référentiel mais dépend de la configuration du système.

2 - Energie interne d'un système de particules

On appelle énergie interne U d'un système de points matériels, la somme de l'énergie cinétique (exprimée par rapport à (R_c)) et de l'énergie potentielle d'interaction définie précédemment.

$$U = E_{c/R_c} + E_p^{int}$$

3 - Cas d'un système isolé - Conservation de l'énergie interne

Soit un système de points matériels soumis à des forces conservatives, il y a conservation de l'énergie mécanique E du système

$$E = E_{c/R} + E_p = cte \qquad (3)$$

or d'après le deuxième théorème de Koenig (§.XXVIII,3) nous avons :

$$E_{c/R} = E_{c/R_c} + \frac{P^2{}_{/R}}{2m}$$

et dans l'expression (3) :

$$E = E_{c/R_c} + \frac{P^2{}_{/R}}{2m} + E_p = cte \qquad (4)$$

Le système étant supposé isolé, la quantité de mouvement totale est constante $\vec{P}_{/R} = \vec{cte}$, donc $\frac{P^2{}_{/R}}{2m}$ est un terme constant; et en prenant la différentielle de (4) nous avons :

$$dE = d(E_{c/R_c} + \frac{P^2{}_{/R}}{2m} + E_{p)} = 0$$

et donc

$$dE = dE_{c/R_c} + dE_p = 0 \qquad (5)$$

Puisque le système est isolé $dE_p = dE_p^{int}$, l'énergie potentielle du système est égale à une constante près à l'énergie potentielle d'interaction des particules du système.
En effet :

$$dE_p = dE_p^{int} + dE_p^{ext} \qquad (6)$$

dE_p^{ext} étant l'élément différentiel de l'énergie potentielle associée aux forces conservatives $\vec{f}_i^{ext}$ d'origine extérieure au système et agissant sur les points M_i , c'est-à-dire :

$$dE_p^{ext} = -\sum \vec{f}_i^{ext} . d\vec{M}_i$$

Les points matériels étant isolés $\vec{f}_i^{ext} = \vec{0}$, donc :

$$dE_p^{ext} = 0$$

l' expression (5) se réduit alors à :

$$dE_p = dE_p^{int}$$

et dans (5) nous obtenons :

$$dE_{c/R_c} + dE_p^{int} = d(E_{c/R_c} + E_p^{int}) = 0$$

or $U = E_c + E_p^{int}$ représente l'énergie interne du système; donc nous avons finalement :

$$dU = 0 \quad \text{et} \quad U = cte$$

L'énergie interne d'un système de points isolés soumis à des forces conservatives est une constante du mouvement.

Remarque :

* Lorsque les forces d'interaction (d'origine interne) pour un système isolé ne dérivent pas toutes d'un potentiel, l'énergie interne n' est plus conservée, comme c'est le cas d'une collision inélastique.

PARTIE A

I - Repérage d'un point matériel. Systèmes de coordonnées, surfaces et courbes coordonnées

1- Systèmes de coordonnées
   a- Coordonnées cartésiennes
   b- Coordonnées cylindriques
   c- Coordonnées sphériques

II - Surfaces coordonnées. Courbes coordonnées

1- Définitions
   a- Surface coordonnée
   b- Courbe coordonnée
2- Application au cas de systèmes de coordonnées simples
   a- Surfaces et courbes coordonnées en coordonnées cartésiennes.
   b- Surfaces et courbes coordonnées en coordonnées cylindriques
   c- Surfaces et courbes coordonnées en coordonnées sphériques

III - Systèmes d'axes locaux ("repères locaux")

1- Position du problème
2- Détermination du "repère local" dans le cas général
   a- Direction et sens des axes locaux
   b- Vecteurs unitaires de base du système d'axes locaux
3- Systèmes d'axes locaux en coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques
   a- "Repère local" en coordonnées cartésiennes ($q_1 = x$, $q_2 = y$, $q_3 = z$)
   b- Repère local en coordonnées cylindriques ($q_1 = r$, $q_2 = \varphi$, $q_3 = z$)
   c- Repère local en coordonnées sphériques : ($q_1 = \rho$, $q_2 = \theta$, $q_3 = \varphi$)
   d- Passage d'un repère local à un autre
4- Cas particulier : repère local de Serret Frenet et formules associées.
   a - Présentation
   b - Eléments caractéristiques d'une courbe (trajectoire)
   c - Trièdre et base de SERRET FRENET
   d - Formules de SERRET-FRENET

IV - Caractéristiques fondamentales de la cinématique

1- Trajectoire - Equations paramétriques du mouvement
- a - Trajectoire
- b- Equations paramétriques

2- Vitesse d'un point matériel
- a- Vitesse moyenne
- b- vitesse instantanée
- c. Hodographe du mouvement

3- Accélération d'un point matériel

V - Composantes de la vitesse dans différents repères locaux

1- Repère local en coordonnées cartésiennes
2- Repère local en coordonnées cylindriques
3- Repère local en coordonnées sphériques
4- Dans le repère de SERRET-FRENET :

VI - Composantes de l'accélération dans différents repères locaux

1- Repère local en coordonnées cartésiennes
2- Dans le repère local en coordonnées cylindriques
3- Dans le repère local en coordonnées sphériques
4. Dans le repère de SERRET FRENET

VII - Exemples de mouvements particuliers simples

1- Mouvement rectiligne
- a- Définition
- b- Mouvement rectiligne uniforme
- c- Mouvement rectiligne uniformément varié
- d - Mouvement rectiligne sinusoïdal

2- Mouvement circulaire
- a- Définition
- b- Vecteur vitesse de rotation
- c- Vecteur accélération

3- Mouvement hélicoïdal

a- Définition
b- Equations paramétriques.
c- Expression du vecteur vitesse :
d- Expression de l'accélération

VIII - Mouvement à accélération centrale

1- définition :
2- Propriétés du mouvement à accélération centrale.
   a- Constante du mouvement
   b- Caractère plan du mouvement :
   c- Loi des aires :
   d- Sens du mouvement :
3- Formules de Binet :
   a- Première formule de Binet
   b- Deuxième formule de Binet
4- Exemples de mouvements à accélération centrale
   a- Particule dans un champ Newtonien.
   b- Particule soumise à une force centrale attractive proportionnelle à la distance

IX - Changement de Référentiel

1- Position du Problème :
2- Divers types de mouvements simples de (R') par rapport à (R).
   a- Mouvement de translation
   b- Mouvement de rotation de (R') autour dun axe lié à (R)
   c- Angles d'Euler.
3- Transformation du vecteur vitesse.
   a- Dérivation d'un vecteur par rapport au temps relativement aux référentiels (R) et (R')
   b- Loi de compostion du vecteur vitesse
   c- Cas particuliers simples du mouvement de (R') par rapport à (R).
   d- Application de la loi de composition des vitesses
4- Transformation du vecteur accélération.
   a- Loi de composition
   b- Cas particuliers simples du mouvement de (R') par rapport à (R).
   c- Exemple de mouvement composé : mouvement cycloïdal.
5- Transformation de Galilée.

PARTIE B

X - Principes de la dynamique (Lois de Newton)

1- Principe d'inertie
2- Principe fondamental de la dynamique
3 - Principe de l'action et de la réaction :

XI - Formulation du principe fondamental de la dynamique dans un référentiel non galiléen.

1- Position du problème :
2 - Forces d'inertie
3- Forces d'inertie dans les cas de mouvements particuliers :
  a- Mouvement de translation de (R') par rapport à (R_G) .
  b- Mouvement de rotation de (R') par rapport à (R_G) autour d'un axe (Δ) passant par O'.
4- Equilibre d'un point matériel dans un référentiel non galiléen.

XII - Application des référentiels non galiléens à la dynamique terrestre

1- Notion de poids d'un corps . Pesanteur.
  a- Définition :
  b - Causes de la pesanteur :
2- Principe fondamental de la dynamique dans le référentiel terrestre (R).
3- Champ de la pesanteur terrestre - Verticale d'un lieu.
4 - Variation du champ de la pesanteur avec la latitude.
5 - Etat d'apesanteur dans un satellite artificiel.
6 - Deviation vers l'Est des trajectoires de chute libre.
  a- Description du problème.
  b- Equations du mouvement :
7 - Pendule de Foucault
  a- principe
  b - Equations du mouvement

PARTIE C

XIV - Travail et Puissance d'une force

1- Travail élémentaire.
2- Travail le long d'une trajectoire curviligne.
3 - Puissance d'une force :
4 - Unités de travail et de puissance
5- Puissance dans le cas des forces particulières.
   a- Puissance du poids d'un point matériel
   b- Puissance d'une force centrale.

XV - Théorème de la puissance -Théorème de l'énergie cinétique

1- Définition de l'énergie cinétique :
2- Théorème de la puissance
3- Théorème de l'énergie cinétique

XVI - Champ conservatif - Energie potentielle

1- Champ de forces conservatif.
2- Energie potentielle
3- Expression de l'énergie potentielle dans des cas particuliers :
   a- Cas d'un champ Newtonien :
   b- Energie potentielle de la pesanteur :
   c- Relation entre l'énergie potentielle de la pesanteur et l'énergie potentielle du champ Newtonien
   d- Energie potentielle de la force de rappel d'un ressort
   e- Cas où l'énergie potentielle dépend du temps :
   f- Energie potentielle d'interaction de deux atomes d'une molécule (liaison ionique)

XVII - Energie Mécanique - Théorème de conservation

1- Définition
2- Théorème de conservation de l'énergie mécanique :
3- Cas des forces appliquées pas toutes conservatives

XVIII - Equilibre et stabilité d'un point matériel dans un champ conservatif

1- Position du Problème
2- Condition d'équilibre sur l'énergie potentielle :
3- Exemple : Application au cas d'un système de particules

XIX - Etude qualitative d'un système conservatif particulier - Etat lié - Etat de diffusion.

1- Equation du mouvement :
2- Etude du mouvement dans un cas particulier de l'énergie potentielle :
3- Etat lié et état de diffusion :
  a- Etat lié
  b- Etat de diffusion

XX - Etude dynamique du mouvement d'un point matériel soumis à une force centrale

1- Définition
2- Propriétés déduites du mouvement à force centrale :
  a- Caractère plan de la trajectoire
  c- Nature conservative de la force centrale
3- Equation du mouvement - trajectoire

Partie D

Oscillateurs Harmoniques

XXI - Etude du mouvement d'un point matériel au voisinage de l'équilibre stable

1 - Rappel
- a- Position d'équilibre
- b- Stabilité de l'équilibre

2 - Voisinage de l'équilibre

3 - Equation du mouvement au voisinage de l'équilibre

XXII - Oscillateur harmonique non amorti

1- Définition

2- Exemples
- a- Pendule élastique horizontal
- b- Pendule simple
- c- Pendule cycloïdal

3 - Apect énergétique de l'oscillateur harmonique
- a- moyenne de l'énergie cinétique
- b- moyenne de l'énergie potentielle
- c- moyenne de l'énergie mécanique

4 - Oscillateur harmonique bidimensionnel

XXIII - Oscillateurs harmoniques amortis

1-oscillateur amorti par frottement visqueux
- a- oscillateur faiblement amorti
- b- cas critique
- c- oscillateur fortement amorti
- d- perte d'énergie d'un oscillateur faiblement amorti

2 - oscillateur amorti par frottement solide.

XXIV - Oscillations forcées

1 - position du problème

Partie E

Etude des systèmes de points matériels - Théorèmes généraux

XXVI - Théorèmes généraux pour un système de points matériels

1- Quantité de mouvement d'un système - Théorème associé
  a- Définition
  b- Théorème de la quantité de mouvement
2 - Moment cinétique d'un système - Théorème associé
  a- Définition
  b- Théorème du moment cinétique

XXVII - Notion du centre de masse d'un système - Théorème associé

1 - Définition
2 - Vitesse du centre de masse
3 - Moment cinétique d'un système de points matériel en introduisant le centre de masse
4 - Théorème du mouvement du centre de masse

XXVIII - Référentiel du centre de masse - Théorème de Kœnig

1- Définition
2- Premier théorème de Kœnig (relatif au moment cinétique)
3- Deuxième théorème de Kœnig (relatif à l'énergie cinétique)
4- Propriété de l'énérgie cinétique dans (R_c) dans le cas d'un système à deux particules.

XXIX - Notion d'énergie interne d'un système de particules

1- Energie potentielle d'interaction
2- Energie interne d'un système de particules
3- Cas d'un système isolé - conservation de l'énergie interne.

Partie F

Etude des collisions entre particules

XXX - Notion de collision - Collisions élastique et inélastique

1- Définition
2- Collision élastique
3- Collision inélastique

XXXI - Description de la collision élastique dans le référentiel du centre de masse (R_c) associé à un référentiel (R)

1- Energie cinétique et quantité de mouvement de deux particules exprimées dans (R_c).
  a- Energie cinétique
  b- Quantité de mouvement
2 - Etude de la collision élastique dans (R_c)
  a- Expression des vitesses des particules après la collision
  b- Propriétés de la collision élastique
    Propriété 1
    Propriété 2

XXXII - Cas particuliers de collisions élastique et inélastique

1 - Collision élastique directe (ou frontale)
2 - Collision parfaitement inélastique
3 - Coefficient de restitution.

PARTIE G

RELATIVITE RESTREINTE

XXXIII - Cinématique relativiste

1. Introduction.
2. Transformation de Lorentz.
3. L'expérience de Michelson-Morely.

XXXIV - Dynamique relativiste

1. Equivalence entre masse et énergie.
2. Transformation des vitesses.
3. Energie relativiste.
4. Transformation de l'énergie et de la quantité de mouvement.
5. Quadri-vecteur quantité de mouvement.

Partie H

Interaction de deux points matériels
Etude de la diffusion des particules

XXXIII - Etude de l'interaction de deux points matériels

1- Mouvement du centre de Masse
2- Homothétie des trajectoires
3- Caractéristiques du mouvement dans le référentiel du centre de masse
  a- Position relative des points
  b- Conservation du mouvement cinétique
  c- Energies cinétique et mécanique.

XXXIV - Détermination de la déviation entre deux particules en interaction

1- Position du problème
2- Diffusion d'une particule par un centre de force
3- Cas particulier : diffusion d'une particule α par un noyau

XXXV - Notion de section efficace

1- Position du problème
2- Section efficace élémentaire
3- Section efficace différentielle
4- Section efficace de diffusion de RUTHERFORD.